



# SOLUTIONS OF THE EXERCISES

IN

MESSRS. HALL AND STEVENS'

NEW SCHOOL GEOMETRY

\*PART V\*

BY

Pandit Kanhaiya Lal Sharma B.A.

Late MATHEMATICAL TEACHER

STATE HIGH SCHOOL

RAMPUR STATE

NOW PLEADER ALIGARH

PRINTED BY

LAKSHMI NARAYAN

at the Lakshmi Narayan Press,

MORADABAD.

All rights reserved

1910, Inte

First Edition-  
1000 Copies

Price per copy  
8 annas

Publishers-KANHAIYA LAL & BROS. ALIGARH.



# SOLUTIONS OF GEOMETRICAL EXERCISES

## • \* PART V. \* •

Exercises on page 253.

1. Let  $x$  be the missing term in each of the following proportions, then

$$(1) 3 : 7 = 15 : x, \text{ whence } 3x = 7 \times 15, \text{ or } x = 35$$

$$(ii) 2 : 5 = x : 32, \text{ whence } 10x = 2 \times 32, \text{ or } x = 8$$

$$(iii) x : ac^3 = bc : bc^3, \text{ whence } bc^3x = ac^3 \times bc, \text{ or } x = a$$

2. In a proportion, the magnitudes compared must be of the same kind in each ratio.

∴ The corrected statement would be—

$$\text{£} 65 : \text{£} 25 = 78 \text{ ft.} : 30 \text{ ft.}$$

3. Let a st line  $AB$  9 6" long be divided internally at  $X$  in the ratio 5 : 7



It is required to find the lengths of  $AX$  and  $XB$ .

$$\text{Since } AX : XB = 5 : 7, \therefore AX + XB : XB = 5 + 7 : 7, \text{ or } AB : XB = 12 : 7$$

$$\therefore 12 : 7 = AB : 9 \frac{6}{10}, \text{ whence } XC = 5 \frac{6}{10}$$

$$\therefore AX = AB - XC = 9 \frac{6}{10} - 5 \frac{6}{10} = 4 \frac{2}{5}$$

( 2 )

4. Let a st line  $AB$  4 5 cm long be divided externally at  $X$  in the ratio 11 : 8. It is required to find the lengths of  $AX$  and  $XB$ .



Since  $AX : XB = 11 : 8$ ,  $\therefore AX - XB : XB = 11 - 8 : 8$ , or  $AB : XB = 3 : 8$

$$\therefore 3XB = 8AB = 8 \times 4.5 \text{ cm}, \text{ whence } XB = 12 \text{ cm.}$$

$$\therefore AX = AB + XB = 4.5 \text{ cm} + 12 \text{ cm} = 16.5 \text{ cm.}$$

5. Let a st line  $AB$  6 4 cm long be divided internally at  $X$  and externally at  $Y$  in the ratio 5 : 3. It is required to find the lengths of the segments.



Since  $AX : XB = 5 : 3$ ,  $\therefore AX + XB : XB = 5 + 3 : 3$ , or  $AB : XB = 8 : 3$

$$\therefore 8XB = 3AB = 3 \times 6.4 \text{ cm}, \text{ whence } XB = 2.4 \text{ cm.}$$

$$\therefore AX = AB - XB = 6.4 \text{ cm} - 2.4 \text{ cm} = 4 \text{ cm}$$

Again since  $AY : YB = 5 : 3$ ,  $\therefore AY - YB : YB = 5 - 3 : 3$ , or  $AB : YB = 2 : 3$

$$\therefore 2YB = 3AB = 3 \times 6.4 \text{ cm}, \text{ whence } YB = 9.6 \text{ cm.}$$

$$\therefore AY = AB + YB = 6.4 \text{ cm} + 9.6 \text{ cm} = 16 \text{ cm}$$

$$(ii) \quad \therefore \frac{1}{AX} + \frac{1}{AY} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}, \text{ also } \frac{2}{AB} = \frac{2}{6.4} = \frac{5}{16}, \\ \therefore \frac{2}{AB} = \frac{1}{AX} + \frac{1}{AY}$$

6. See figure Ex. 3.

Let a st line  $AB$   $a''$  long be divided internally at  $X$  in the ratio  $m : n$ . It is required to show that the lengths of the segments are respectively  $\frac{m}{m+n} \cdot a''$ , and  $\frac{n}{m+n} \cdot a''$

$$\text{segments are respectively } \frac{m}{m+n} \cdot a'', \text{ and } \frac{n}{m+n} \cdot a''$$

( 3 )

Since  $AX \cdot XB = m \cdot n$ ,  $\therefore AX + XB \cdot XB = m + n \cdot n$ , or  $AB \cdot XB = m + n \cdot n$

$\therefore (m+n) \cdot XB = n \cdot AB = n \cdot a^n$ , whence  $XB = \frac{n}{m+n} \cdot a^n$

$\therefore AX = AB - XB = a - \frac{n}{m+n} \cdot a = \frac{m}{m+n} \cdot a^n$

### 7. See figure Ex. 4.

Let a st line  $AB = a$  units long be divided externally at  $X$  in the ratio  $m:n$ . It is required to show that the lengths of the segments are respectively  $\frac{m}{m-n} \cdot a$  units, and  $\frac{n}{m-n} \cdot a$  units.

Since  $AX \cdot XB = m \cdot n$ ,  $\therefore AX - XB \cdot XB = m - n \cdot n$ , or  $AB \cdot XB = m - n \cdot n$

$\therefore (m-n) \cdot XB = n \cdot AB = n \cdot a$ , whence  $XB = \frac{n}{m-n} \cdot a$  units

$\therefore AX = AB - XB = a - \frac{n}{m-n} \cdot a = \frac{m}{m-n} \cdot a$  units.

### 8. Since $a:b = x:y$ , and $b:c = y:z$

$\therefore$  By multiplying the two ratios we have

$$a:c = x:z.$$

### 9. Since $a:b = x:y$ , $\therefore$ Inversely $b:a = y:x$

$$\therefore a+b:a = x+y:x \quad (\text{alternendo})$$

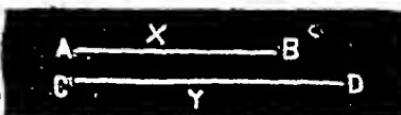
### 10. Let $a, b, c$ be three proportionals, then

$$a:b = b:c.$$

$\therefore$  By multiplying these equal ratios we will get the square of one of them, that is

$$a:c = a^2:b^2.$$

### 11. Let $AB$ and $CD$ be two st lines divided internally in the same ratio at $X$ and $Y$ respectively. It is required to show that (i) $AB \cdot XB = CD \cdot YD$ , and



(ii)  $AB \cdot AX = CD \cdot CY$

Since  $AX \cdot XB = CY \cdot YD$ ,  $\therefore AX + XB \cdot XB = CY + YD \cdot YD$ ,  
or  $AB \cdot XB = CD \cdot YD$

Again since  $AX \cdot XB = CY \cdot YD$ ,  $\therefore$  Inversely  $XB \cdot AX = YD \cdot CY$   
 $XB + AX \cdot AX = YD + CY \cdot CY$ , or  $AB \cdot AX = CD \cdot CY$ .

12. Let  $a, b, c, d$  be four st lines such that  $ad = bc$ . It is required to prove that  $a:b = c:d$ .

Dividing each side of the equation  $ad = bc$  by  $bd$ , we have

$$a:b = c:d$$

### Exercises on page 258.

1. Upon a st line  $AB$  3 5" long, draw a triangle  $ABC$  such that one of its sides  $AC = 4\frac{5}{8}$ ". From  $AB$  cut off  $AX = 2\frac{1}{4}$ ", then  $BX = AB - AX = 3\frac{5}{8} - 2\frac{1}{4} = 1\frac{4}{8}$ "

From  $X$  draw  $XY$  parl to  $BC$  meeting  $AC$  in  $Y$ . Measure  $AY, CY$  and notice that  $AY = 2\frac{7}{8}$ " and  $CY = 1\frac{8}{8}$ "

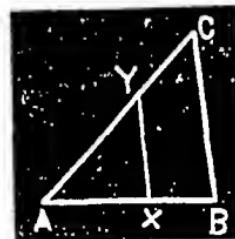
$$\text{(i)} \quad \frac{AX}{BX} = \frac{2\frac{1}{4}}{1\frac{4}{8}} = \frac{3}{2}, \text{ and } \frac{AY}{CY} = \frac{2\frac{7}{8}}{1\frac{8}{8}} = \frac{3}{2}, \quad \frac{AX}{BX} = \frac{AY}{CY}$$

$$\text{(ii)} \quad \frac{AB}{AX} = \frac{3\frac{5}{8}}{2\frac{1}{4}} = \frac{5}{3}, \text{ and } \frac{AC}{AY} = \frac{4\frac{5}{8}}{2\frac{7}{8}} = \frac{5}{3}. \quad \frac{AB}{AX} = \frac{AC}{AY}$$

$$\text{(iii)} \quad \frac{AB}{XB} = \frac{3\frac{5}{8}}{1\frac{4}{8}} = \frac{5}{2}, \text{ and } \frac{AC}{YC} = \frac{4\frac{5}{8}}{1\frac{8}{8}} = \frac{5}{2}, \quad : \quad \frac{AB}{XB} = \frac{AC}{YC}$$

2. See figure Ex. 1.

Let  $ABC$  be a triangle, and let  $XY$  be drawn parl to  $BC$  cutting  $AB$  at  $X$  and  $AC$  at  $Y$ , then



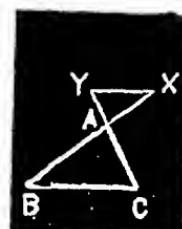
$$AY \cdot AC = AX \cdot AB \quad [\text{Th } 60, \text{ cor}], \quad \therefore AB \cdot AY = AC \cdot AX$$

$\therefore$  (i) If  $AB = 3\frac{6}{10}$ ,  $AC = 2\frac{4}{10}$ , and  $AX = 2\frac{1}{10}$ , then  
 $3\frac{6}{10} \times AY = 2\frac{4}{10} \times 2\frac{1}{10}$ , whence  $AY = 1\frac{4}{10}$

(ii) If  $AB = 2$ ,  $AC = 1\frac{5}{10}$ , and  $AY = 9$ ; then  
 $2 \times 9 = 1\frac{5}{10} \times AX$ , whence  $AX = 1\frac{2}{10}$   
 $\therefore BX = AB - AX = 2 - 1\frac{2}{10} = 8$

(iii) If  $X$  divides  $AB$  in the ratio  $8:3$ , and if  $AC = 8$  cm  
then since  $AY : YC = AX : XB = 8 : 3$   
 $\therefore AB : YC = 11 : 3$ , whence  $11YC = 3AC = 26$  4 cm ;  $\therefore YC = 2.4$  cm.  
 $\therefore AY = AC - YC = 8.8 - 2.4 = 6.4$  cm.

3. Let  $ABC$  be a triangle, and let  $XY$  be drawn  
parl. to  $BC$  cutting the sides  $AB$ ,  $AC$  produced  
at  $X$  and  $Y$  respectively, then  $AY \cdot AC = AX \cdot AB$   
[ Th 60, cor ]  $\therefore AB \cdot AY = AC \cdot AX$



$\therefore$  (i) If  $AB = 4.5$  cm.  $AC = 3.5$  cm, and

$$AX = 7.2 \text{ cm}, \text{ then } 4.5 \times AY = 3.5 \times 7.2, \text{ whence } AY = 5.6 \text{ cm}$$

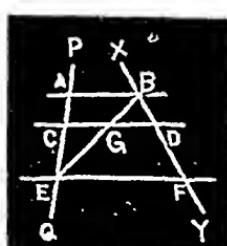
(ii) If  $X$  divides  $AB$  externally in the ratio  $11:4$ , and  
if  $AC = 4.9$  cm, then  $YC : AY = XB : AX = 11 : 4$

$$\therefore AC \cdot AY = 7.4, \text{ whence } 7AY = 4AC = 19.6 \text{ cm.}; \therefore AY = 2.8 \text{ cm}$$

$$\therefore YC = AC + AY = 4.9 + 2.8 \text{ cm.} = 7.7 \text{ cm.}$$

4. Let three parallel st lines  $AB$ ,  $CD$ ,  $EF$  be  
cut by two transversals  $PQ$ ,  $XY$  in the pts  
 $A, C, E$  and  $B, D, F$  as shown in the diagram  
It is required to prove that  $AC \cdot CE = BD \cdot DF$

Join  $BE$ , cutting  $CD$  at  $G$ , then  
since  $CG$  is parl to  $AB$ ,



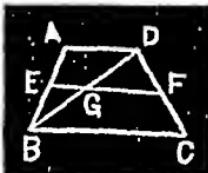
( 6 )

$$AC \cdot CE = BG \cdot GE \quad [\text{Th. 60}]$$

Again since  $DG$  is parl to  $EF$ ,  $\therefore BG \cdot GE = BD \cdot DF \quad [\text{Th. 60}]$

$$\therefore AC \cdot CE = BD \cdot DF$$

5. Let  $ABCD$  be a trapezium, and let  $E, F$  be the middle points of the oblique sides  $AB$  and  $CD$  respectively. Join  $EF$ , then shall  $EF$  be parl to  $AD$  or  $BC$ .



For, if not, let  $EF$  be parl to  $BC$  meeting  $BD, CD$  in the pts  $G$  and  $f$ . Then it can be proved as in Ex 4, that

$$AE:EB=DG:BG=DF:fC$$

But  $AE = EB$ , hence  $Df = fC$

$\therefore$  The pt  $f$  coincides with  $F$ , and therefore  $EF$  is parl to  $BC$ .

6. Let  $ABC, DBC$  be two triangles on the same base  $BC$  and on the same side of it. Take any pt  $E$  in  $BC$ , and from  $E$  draw lines parl to  $BA, BD$  meeting  $AC$  in  $F$ , and  $DC$  in  $G$ .



Join  $AD, FG$ , then shall  $FG$  be parl to  $AD$

Since  $EF$  is parl. to  $AB$ ,  $\therefore BE:EC = AF:FC \quad [\text{Th. 60}]$

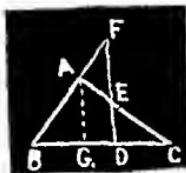
Again since  $EG$  is parl to  $BD$ ,  $\therefore BE:EC = DG:GC \quad ,$

$$\therefore AF:FC = DG:GC$$

$\therefore FG$  is parl to  $AD$  [Converse of Th. 60]

7. Let  $ABC$  be a triangle, and let a transversal  $DEF$  cut the sides  $BC, CA, AB$  in the pts.  $D, E, F$  respectively such that  $\angle AEF = \angle AFE$ . It is required to prove that  $BD \cdot CD = BF \cdot CE$

From  $A$  draw  $AG$  parl. to  $DE$  meeting  $BC$  in  $G$



Since  $AG$  is parl. to  $FD$ ,  $\therefore BG.GD = BA.AF$ , [Th. 60]

and  $BD.GD = BF.AF$  **componendo**

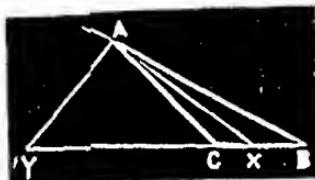
$$\therefore BF.AE \dots\dots\dots (i) \quad [\therefore AF = AE]$$

Again since  $AG$  is parl to  $DE$ ,  $GD.CD = AE.CE$  [Th 60] .(ii)

From (i) and (ii) by multiplication we have  $BD.CD = BF.CE$

### Exercises on page 259

1. Let  $ABC$  be a triangle having  $a=15''$ ,  $b=24''$ , and  $c=36''$ , and let the internal and external bisectors of the  $\angle A$  meet  $BC$  at  $X$  and  $Y$ .



Measure  $BX$ ,  $XC$ ,  $BY$ ,  $YC$ , and notice that  $BX = 9''$ ,  $XC = 6''$ ,  $BY = 4.5''$ , and  $YC = 3.0''$

$$\therefore BX.CX = 9.6 = 3:2, \quad BY.YC = 4.5.3.0 = 3:2,$$

$$\text{and } BA.AC = 15.24 = 3:2$$

$$\therefore BX.CX = BY.YC = BA.AC$$

2. See figure Ex 1

Let  $ABC$  be a triangle having  $a=35\text{cm}$ ,  $b=54\text{cm}$ , and  $c=72\text{cm}$ , and let the internal and external bisectors of the  $\angle A$  meet  $BC$  at  $X$  and  $Y$ .

Measure  $BX$ ,  $XC$ ,  $BY$ ,  $YC$ , and notice that  $BX = 20\text{cm}$ ,  $XC = 15\text{ cm}$ ,  $BY = 14.0\text{cm}$ , and  $YC = 10.5\text{cm}$

By calculation since  $BX.XC = BA.AC$  [Th 61] =  $72.54 = 4:3$

$$\therefore BX + CX = 4 + 3.3, \text{ or } BC.CX = 7.3$$

$$\therefore 7CX = 3BC = 3 \times 35\text{cm}, \text{ or } CX = 15\text{cm}.$$

$$\therefore BX = BC - CX = 35 - 15 = 20\text{cm}.$$

( 8 )

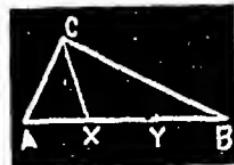
Again because  $BY \cdot YC = BA \cdot AC$  [Th 61]  $= 72 \cdot 5 \cdot 4 = 43$

$\therefore BY \cdot YC = 4 \cdot 3 \cdot 3$ , or  $BC \cdot YC = 1 \cdot 3$ ,  $\therefore YC = 3$   $BC = 10.5\text{cm}$

$$\therefore BY = BC + CY = 3.5\text{cm} + 10.5\text{cm} = 14\text{cm}$$

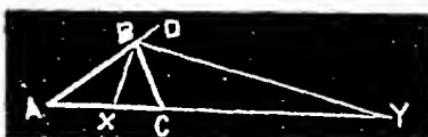
3. (i) Let  $AB$  be a given st line. It is required to trisect it by means of Theor. 61

With centres  $A, B$  and radii 1 and 2 units of length respectively draw two arcs intersecting at  $C$ . Join  $AC, BC$ , and let the bisector of the  $\angle ACB$  meet  $AB$  at  $X$



Then  $AX : BX = AC : BC = 1 : 2$  [Th 61]  $\therefore BX = 2AX$ . Bisect  $BX$  at  $Y$ , Then  $AB$  is trisected at  $X$  and  $Y$ .

(ii) It is required to divide  $AC$  internally and externally in the ratio 3:2



With centres  $A, C$  and radii 3 and 2 units of length respectively draw two arcs intersecting at  $B$ . Join  $AB, CB$ , and let the internal and external bisectors of the  $\angle B$  meet  $AC$  at  $X$  and  $Y$ .

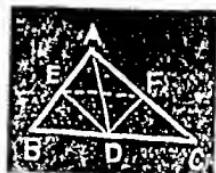
$$\text{Then } AX : CX = AB : BC = 3 : 2 \quad [\text{Th 61}]$$

$$\text{also } AY : CY = AB : BC = 3 : 2 \quad "$$

$$\therefore AX : CX = AY : CY = 3 : 2$$

$\therefore AC$  is divided internally at  $X$  and externally at  $Y$  in the ratio 3:2

4. Let  $AD$  be a median of the  $\triangle ABC$ , and let  $DE, DF$  the bisectors of the  $\angle s ADB, ADC$  meet the sides  $AB, AC$  in the pts.  $E$  and  $F$  respectively. Join  $EF$ , then shall  $EF$  be paral to  $BC$



( 9 )

Since  $DE$  bisects the  $\angle ADB$ ,  $\therefore AE : EB = AD : DB$  (Th. 61)

Again, since  $DF$  bisects the  $\angle ADC$ ,  $\therefore AF : FC = AD : DC$  "

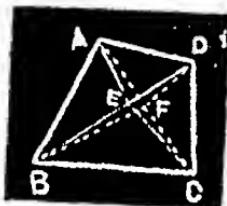
$$= AD : DB (\because DC = DB)$$

$$\therefore AE : EB = AF : FC$$

$\therefore EF$  is parl. to  $BC$

[ Converse of Th. 60 ]

5. Let  $ABCD$  be a quadrilateral, and let the bisectors of the  $\angle A$  and  $C$  meet at the pt  $E$  in  $BD$ . Join  $AC$ , and let the bisector of the  $\angle B$  meet  $AC$  in  $F$ .



Join  $DF$ ; then shall  $DF$  bisect the  $\angle ADC$

Since  $AE$  bisects the  $\angle BAD$ ,  $\therefore AB : AD = BE : ED$  (Th 61),  
also since  $CE$  bisects the  $\angle BCD$ ,  $\therefore BC : CD = BE : ED$  "

$$\therefore AB : AD = BC : CD, \text{ or alternately } AB : BC = AD : CD$$

Again, since  $BF$  bisects the  $\angle ABC$ ,  $\therefore AB : BC = AF : CF$  (Th. 61)

$$\therefore AD : CD = AF : CF$$

$\therefore FD$  bisects the  $\angle ADC$  (Converse of Th 61)

6. Let  $ABC$  be a triangle, and let  $AD, CF$  the bisector of the  $\angle sA$  and  $C$  meet in  $O$ . Join  $BO$ , and produce it to meet  $AC$  in  $E$ .

The, shall  $BE$  bisect the  $\angle B$

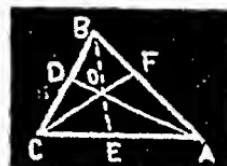
Since  $AO$  bisects the  $\angle BAE$ ,  $\therefore BA : AE = BO : OE$  (Th 61),

also since  $CO$  bisects the  $\angle BCE$ ,  $\therefore BC : CE = BO : OE$  "

$$\therefore BA : AE = BC : CE, \text{ or alternately } BA : BC = AE : CE$$

$\therefore BE$  bisects the  $\angle B$

(Converse of Th 61)

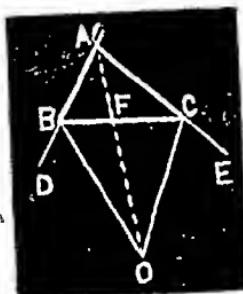


( 10 )

(ii) Let  $ABC$  be a triangle, and let the external bisectors of the  $\angle B$  and  $C$  meet at  $O$ . Join  $AO$ , cutting  $BC$  at  $F$ .

Then shall  $AO$  bisect the  $\angle BAC$   
Since  $BO$  bisects the  $\angle DBF$ ,

$$AB \cdot BF = AO \cdot OF \quad (\text{Th 61}),$$



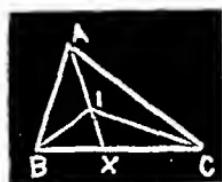
also since  $CO$  bisects the  $\angle FCE$ ,  $\therefore AC \cdot CF = AO \cdot OF$

$$\therefore AB \cdot BF = AC \cdot CF, \text{ or alternately } AB \cdot AC = BF \cdot CF$$

$\therefore AF$ , or  $AO$  bisects the  $\angle BAC$  (converse of Th 61)

7. Let  $ABC$  be a triangle and  $I$  its in-centre  
Join  $AI, BI, CI$ , and produce  $AI$  to meet  $BC$  at  $X$   
Then shall  $AI \cdot IX = AB + AC : BC$

Since  $CI$  bisects the  $\angle ACX$ ,  $AI \cdot IX = AC \cdot CX$



(Th 61)

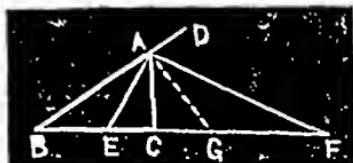
also since  $BI$  bisects the  $\angle ABX$ ,  $AI \cdot IX = AB \cdot BX$

$$AC \cdot CX = AB \cdot BX$$

$$= AB + AC \cdot BX + CX \quad (\text{Prop V, p 251})$$

$$= AB + AC \cdot BC$$

8. Let  $ABC$  be any triangle on the given base  $BC$  and having  $BA : AC = m : n$   
It is required to find the locus of  $A$



Let the internal and external bisectors of the  $\angle A$  meet  $BC$  and  $BC$  produced at  $E$  and  $F$

$$\text{Then } BE : EC = BA : AC = BF : FC$$

(Th. 61)

$\therefore BC$  (a fixed st. line) is divided internally at  $E$ , and externally at  $F$  in the same ratio  $BA:AC$ , or  $m:n$

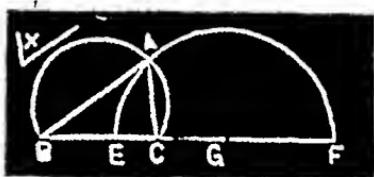
$\therefore E$  and  $F$  are fixed points, and hence  $EF$  is of constant length.

Again because the  $\angle EAF$  (being an angle between the internal and external bisectors of the  $\angle A$ ) is a right angle.

$\therefore$  the locus of  $A$  is a circle on the diameter  $EF$

**Note**—This important locus is known as the **Apollonian locus**.

9. Let  $BC$  be the given base,  $m:n$  the ratio of the other sides  $BA, AC$ , and  $X$  the given vertical angle  
It is required to construct the triangle.



Upon  $BC$  describe a segment having an angle =  $\angle X$ .  
Then  $A$  lies on the arc of this segment.

Again divide  $BC$  internally at  $E$  and externally at  $F$  in the same ratio  $m:n$ , and on the diameter  $EF$  describe circle, then  $A$  lies on this circle (Proved in EX.8)

$\therefore$  the pt.  $A$  where this circle cuts the former arc is the vertex of the required triangle

Join  $AB, AC$ . Then  $ABC$  is the required triangle.

**Note**—This exercise can also be easily proved by means of Theor. 62 as shown in EX. 9 (IV)P. 278.

## Exercises on page 262.

1. Let  $ABC$  be a triangle, and let  $XY$  be drawn parallel to  $BC$  cutting  $AB$  at  $X$ , and  $AC$  at  $Y$ . Then,

the  $\angle AXY =$  the alt.  $\angle ABC$ , and the  $\angle AYX$   
 $=$  the alt.  $\angle ACB$  [Th. 14].

∴ The third angles of the  $\triangle s AXY, ABC$  are also equal,  
and hence they are equiangular

$$AB \cdot AX = AC \cdot AY \text{ [ Th. 62 ]}, \text{ and } \therefore AB \cdot AY = AC \cdot AX.$$

( i ) If  $AB = 2\cdot5''$ ,  $AC = 2\cdot0''$ ,  $AX = 1\cdot5''$ ; then

$$2\cdot5 \times AY = 2 \times 1\cdot5, \text{ whence } AY = 1\cdot2''$$

( ii ) If  $AB = 3\cdot5''$ ,  $AC = 2\cdot1''$ ,  $AY = 1\cdot2''$ ; then

$$3\cdot5 \times 1\cdot2 = 2\cdot1 \times AX, \text{ when } AX = 2''$$

( iii ) If  $AB = 4\cdot2 \text{ cm}$ ,  $AX = 3\cdot6 \text{ cm}$ ,  $AY = 6\cdot6 \text{ cm}$ , then

$$4\cdot2 \times 6\cdot6 = 3\cdot6 \times AC, \text{ whence } AC = 7\cdot7 \text{ cm.}$$

## 2. See figure Ex. 1.

Since  $AB \cdot AX = BC \cdot XY$  [Th 62],  $AB \cdot XY = AC \cdot BC$ .

∴ ( i ) If  $AB = 2\cdot4''$ ,  $BC = 3\cdot6''$ ,  $AX = 1\cdot4''$ ; then

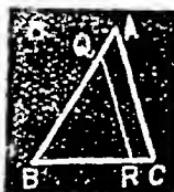
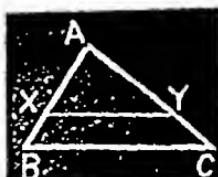
$$2\cdot4 \times XY = 1\cdot4 \times 3\cdot6, \text{ whence } XY = 2\cdot1''$$

( ii ) If  $BC = 7\cdot7 \text{ cm}$ ,  $XY = 5\cdot5 \text{ cm}$ ,  $AX = 4\cdot5 \text{ cm}$ , then

$$5\cdot5 \times AB = 4\cdot5 \times 7\cdot7, \text{ whence } AB = 6\cdot8 \text{ cm.}$$

3. Let  $ABC$  be a triangle having  $a = 3''$ ,  $b = 3\cdot6''$ ,  
 $= 4\cdot2''$ , and let a st line  $QR$  drawn parallel to  $AC$   
measure  $3''$ . It is required to find  $QB, BR$ .

As in Ex 1, the  $\triangle s QBR$  and  $ABC$  are equiangular.



( 18 )

$$\therefore QB:AB = QR:AC, \therefore QB:AC = QR:AB, \text{ or } 8.6 \times QB = 8 \times 4.8$$

$$\therefore QB = 3.5'$$

$$\text{Also } BR:BC = QR:AC, \therefore BR:AC = QR:BC, \text{ or } 8.6 \times BR = 8 \times 3$$

$$\therefore BR = 2.5'.$$

4. Let  $ABC$  be a triangle having  $a=8$  cm,  $b=7$  cm,  $c=10$  cm. From  $AB$  cut off  $AP=4$  cm, draw  $PQ$  parl. to  $BC$ . It is required to find  $PQ$  and  $QC$ .



Since the  $\Delta s APQ, ABC$  are equiangular,

$$\therefore AP:AB = PQ:BC, \therefore AP:BC = AB:PQ, \text{ or } 4 \times 8 = 10 \times PQ$$

$$\therefore PQ = 3.2 \text{ cm.}$$

$$\text{Also } AQ:AC = AP:AB, \therefore AQ:AB = AC:AP, \text{ or } 10 \times AQ = 7 \times 4$$

$$\therefore AQ = 2.8 \text{ cm, and } QC = AC - AQ = 7 - 2.8 = 4.2 \text{ cm}$$

5. Let the three sides  $BA, AC, CB$  of the triangle  $ABC$  represent the sides of the field measuring 300 yds., 350 yds., and 400 yds., respectively

$$\text{Then } AC \cdot BC = 350 \cdot 400 = 7:8, \therefore \text{If } BC = 2.4', AC = 2.1'$$

$$\text{And } AB \cdot BC = 300 \cdot 400 = 3:4, \therefore \text{If } BC = 2.4', AB = 1.8'$$

6. See figure Ex. 1.

Let  $ABC$  be a triangle, and let  $XY$  be parl. to  $BC$ . Then if  $AX = 8\frac{1}{2}$  ft,  $XY = 3\frac{1}{2}$  ft.,  $AY = 6$  ft. 2 in., and  $XB = 4\frac{1}{2}$  ft., it is required to find  $AB, BC$  and  $CA$ .

$$AB = AX + BX = 8\frac{1}{2} \text{ ft.} + 4\frac{1}{2} \text{ ft.} = 12\frac{1}{2} \text{ ft.}$$

Since the  $\Delta s AXY, ABC$  are equiangular,

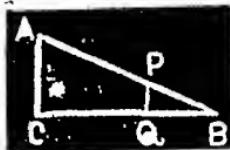
$$\therefore AX:AB = XY:BC, \therefore AX \cdot BC = AB \cdot XY, \text{ or } 8\frac{1}{2} \times BC = 12\frac{1}{2} \times 3\frac{1}{2}$$

$$\therefore BC = 5 \text{ ft.}$$

$$\text{And } A \cdot XAB = AY \cdot AC, \therefore AX \cdot AC = AB \cdot AY, \text{ or } 8\frac{1}{2} \times AC = 12\frac{1}{2} \times 6\frac{1}{2}$$

$$\therefore AC = 9\frac{1}{2} \text{ ft.}$$

7. Let  $ABC$  be a triangle right-angled at  $C$ . Take a pt  $P$  in  $AB$ , and draw  $PQ$  paral to  $AC$ . Then if  $AC=1\frac{1}{4}$ ",  $BC=3"$ ,  $PQ=\frac{1}{2}"$ , it is required to find  $BQ$ ,  $BP$ , and  $AP$



$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{\frac{25}{16} + 9} = \frac{13}{4}"$$

Since the  $\triangle s PBQ, ABC$  are equiangular,

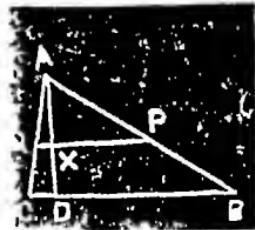
$$\therefore BQ:BC=PQ:AC \quad \text{or} \quad AC \cdot BQ = BC \cdot PQ, \text{ or } \frac{5}{4} \times BQ = 3 \times \frac{1}{2}, \therefore BQ = 1.2"$$

and  $BP:AB=PQ:AC$ ,  $\therefore AC \cdot BP = AB \cdot PQ$ , or  $\frac{5}{4} \times BP = \frac{13}{4} \times \frac{1}{2}$ ,

$$\therefore BP = 1.3"$$

$$\therefore AP = AB - BP = \frac{13}{4} - 1.3 = 1.95"$$

8. In a triangle  $ABC$  let  $AD$  be perp. to  $BC$ , and let  $PXQ$  be a st line paral to  $BC$  cutting  $AB$  at  $P$ ,  $AD$  at  $X$ , and  $AC$  at  $Q$ . Then if  $BC=9$ cm,  $AD=8$ cm,  $DX=3$ cm, it is required to find  $PQ$



Since  $AX=AD-DX=8-3=5$ cm, and  $\triangle s APX, ABD$  are equiangular  $\therefore AX:AD=PX:BD$ .

Again since the  $\triangle s AQX, ABD$  are equiangular,

$$\therefore AX:AD=QX:CD$$

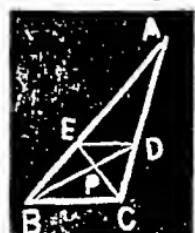
$$\therefore AX:AD=PX:BD=QX:CD$$

$$\therefore PX+QX:BD+CD = PQ:BC \quad (\text{Prop V, p. 251})$$

$$\therefore AX:BC=AD:PQ, \text{ or } 5:9=8:PQ, \text{ whence } PQ=\frac{55}{8}\text{cm}$$

9. Let  $ABC$  be a triangle having  $a=2$ cm,

$b=3.5$ cm,  $c=4.5$ cm, and let there be drawn two st lines  $BD$ ,  $CE$  to the opp. sides intersecting at  $P$ . Then if  $EP:PB=DP:PB=2.5$ ,



(15)

It is required to find  $ED$ ,  $AD$ , and  $DC$

In the  $\triangle BPC$ , and  $EPD$ , because the sides about the equal angles at  $P$  are given proportional.

$\therefore \angle PED = \angle BCP$  (Th 62), but these are alternate angles

$\therefore DE$  is parl.  $BC$  (Th 13), and therefore the  $\triangle s ADE$ ,  $ABC$  are equiangular.

Since the  $\triangle s PED$ ,  $BPC$  are equiangular,

$$\therefore DE : BC = EP : PC = 2 : 5, \therefore 5DE = 2BC = 4\text{cm}, \therefore DE = .8\text{cm}$$

Again since the  $\triangle s ADE$ ,  $ABC$  are equiangular,

$$\therefore AD : DE = AC : BC, \therefore BC : AD = AC : DE, \text{ or } 2AD = 3.5 \times 8$$

$$\therefore AD = 1.4\text{cm.}, \text{ and } \therefore DC = AC - AD = 3.5 - 1.4 = 2\text{ cm}$$

### Exercises on page 263

1. Let  $D, F$  be the middle points of the sides  $AB, AC$  of the  $\triangle ABC$

It is required to prove that  $DF$  is parl. to and half of  $BC$

Since  $AD : AB = 1 : 2 = AF : AC$  (Hypothesis)

$\therefore$  the sides about the common  $\angle A$  of the  $\triangle s ADF, ABC$  are proportional, hence they are equiangular. (Th 63)

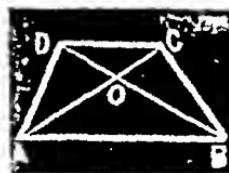
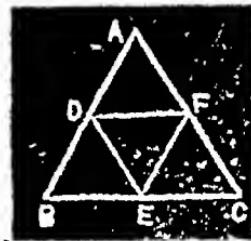
$\therefore \angle ADF = \angle ABC$ , but these are alternate angles,

$\therefore DE$  is parl. to  $BC$  (Th 13)

Also  $DF : BC = AD : AB = 1 : 2$ ,  $\therefore DE = \frac{1}{2}BC$

2. Let the diagonals  $AC, BD$  of the trapezium  $ABCD$  intersect at  $O$ . It is required to prove that  $OA : OC = OB : OD$ .

Since  $\angle DCA = \text{alt.} \angle CAB$ , and  $\angle CDB = \text{alt.}$



$\angle DBA$  (Th 14)

$\therefore$  the third angles of the  $\triangle s COD, AOB$  are also equal,  
and hence they are equiangular

$$\therefore OA \cdot OC = OB \cdot OD \quad (\text{Th 62})$$

(ii) If  $AB=2DC$ , it is required to show that  $O$  is a point of trisection on both diagonals

Since the  $\triangle s COD, AOB$  are equiangular

$$\therefore OA \cdot OC = OB \cdot OD = AB : DC \quad (\text{Th. 62})$$

But  $AB=2 DC$ ,  $\therefore OA=2 OC$ , and  $OB=2 OD$

$\therefore A, O$  is a pt of trisection of both  $AC$ , and  $BD$ .

3. Let  $AX, AY, AZ$  be three transversals cut by two parallels at the pts  $P, Q, R$  and  $X, Y, Z$  respectively. It is required to prove that  $XY \cdot YZ = PQ \cdot QR$

Since the  $\triangle s APQ, AXY$  are equiangular,

$$\therefore XY \cdot PQ = AY \cdot AQ \quad (\text{Th 62})$$

Again since the  $\triangle s AQR, AYZ$  are equiangular,

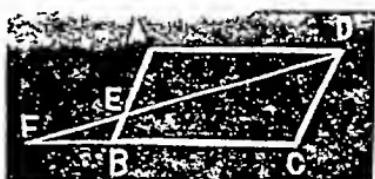
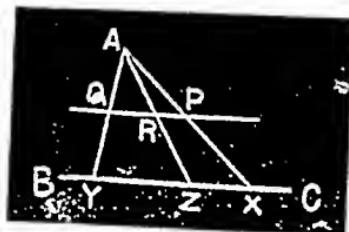
$$\therefore YZ \cdot QR = AY \cdot AQ \quad (\text{Th 62})$$

$$\therefore XY \cdot PQ = YZ \cdot QR, \text{ or alternately } XY \cdot YZ = PQ \cdot QR.$$

4. Let a st. line  $DE$  drawn from the angular point  $D$  of a parlm.  $ABCD$  cut the side  $AB$  at  $E$  and  $CB$  produced at  $F$ . It is required to prove that  $DA \cdot AE = FB \cdot BE$

Since that  $\triangle s AED, BEF$  are equiangular,

$$\therefore DA \cdot FB = AE \cdot BE \quad [\text{Th. 62}], \text{ or alternately } DA \cdot AE = FB \cdot BE$$



Again since the  $\triangle s FCD, FBE$  are equiangular,  
 $\therefore FC:BF = CD:BE$  [Th. 62], or alternately  $FC:CD = FB:BE$   
 $\therefore DA:AE = FB:BE = FC:CD.$

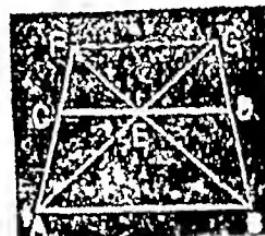
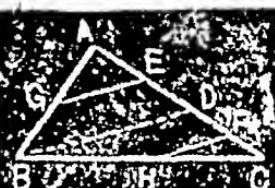
5. Let  $D$  be any point in the side  $AC$  of the  $\triangle ABC$ , and let  $E, F, G, H$  be the middle pts of  $AD, DC, AB, BC$  respectively. It is required to prove that  $EG = HF$ .

Join  $BD$ , then in the  $\triangle ABD$ , since  $E, G$  are the middle points of  $AD$  and  $AB$ , hence  $EG = \frac{1}{2}BD$  [proved in Ex. 1]

Again in the  $\triangle CBD$ , since  $F, H$  are the middle points of  $CD$ , and  $BC$ , hence  $HF = \frac{1}{2}BD$  [proved in Ex. 1]  
 $\therefore EG = HF.$

6. Let  $AB, CD$  be any two paral. st. lines, and let  $E$  be the middle point of  $CD$ , also let  $AC, BE$  meet at  $F$ , and  $AE, BD$  at  $G$ . Join  $FG$ , then it is required to prove that  $FG$  is parl. to  $AB$ .

Since  $AB$  is equal to  $CE$ , hence the  $\triangle s FAB, FCE$  are equiangular  
 $\therefore BF:EF = AB:CE$  [Th. 62]  
 $\therefore AB:DE = BF:EF$  [Ex. 1]  $\therefore CE = DE$



Again since  $AB$  is parl. to  $DE$ , hence the  $\triangle s GAB, GDE$  are equiangular.

$$\therefore AG:GE = AB:DE \text{ [Th. 62]}$$

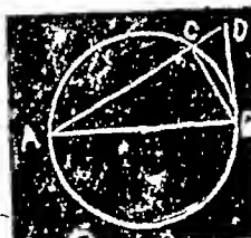
$$\therefore BF:EF = AG:GE, \text{ and } \therefore BF-EF:EF = AG-GE:GE.$$

$$\therefore BE-EF = AE:GE, \text{ and the } \angle AEB = \angle FEG$$

$\therefore \triangle AEB, FEG$  are similar so that  $\angle ABE = \angle EFG$  (Th. 64)

But these are alternate angles, therefore  $FG$  is parl. to  $AB$

7. Let  $AB$  be a diameter of a circle, and through  $A$  let there be drawn any st. line to cut the circumference in  $C$  and the tangent at  $B$  in  $D$ . It is required to prove that (i)  $\Delta s CAB, BAD$  are equiangular, (ii)  $AC, AB, AD$  are proportionals, and (iii) the rect  $AC \cdot AD$  is constant for all positions of  $AD$



(i) In the  $\Delta s CAB, BAD$  because the  $\angle A$  is common, and the  $\angle ABD = \angle ACB$  (each being a rt angle Th. 46 and 41), hence their third angles are also equal.

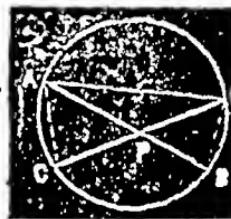
$\therefore$  The  $\Delta s CAB, BAD$  are eqnangular.

(ii) From (i) we have  $AC \cdot AB = AB \cdot AD$ , i.e  $AC, AB, AD$  are proportionals

(iii) From (ii) we have  $AC \cdot AD = AB^2$

But  $AB$  is of constant length, hence the rect  $AC \cdot AD$  is constant for all positions of  $AD$

8. Let  $AB, CD$  be two chords of a circle intersecting at a pt.  $P$  within the circle. Join  $AC, BD$ , then it is required to prove that (i)  $\Delta s APC, DPB$  are equiangular, and (ii)  $AP \cdot DP = PC \cdot PB$



(i) In the  $\Delta s APC, DPB$  because  $\angle APC = \angle DPB$ , and  $\angle ACP = \angle PBD$  [since they are in the same segment  $ACBD$  Th. 39], hence their third angles are also equal

$\therefore$  The  $\Delta s APC, DPB$  are eqnangular.

(ii) From (i) we have  $AP \cdot DP = PC \cdot PB$  [Th. 62.]

(iii) From (ii) we have  $AP \cdot PB = DP \cdot PC$

$\therefore$  If two chords of a circle intersect at a point within it, the rectangles contained by their segments are equal. [Th 57.]

9. From an external pt  $X$  let there be drawn a tangent  $XT$  and a secant  $XAB$  to a circle. Join  $AT, TB$ , then it is required to prove that (i) the  $\triangle$ s  $AXT, TXB$  are equiangular and (ii)  $XA \cdot XT = XT \cdot XB$ .

In the  $\triangle$ s  $AXT, TXB$  because the angle at  $X$  is common, and  $\angle XTA = \angle TBX$  in the int segment [Th 49]; hence their third angles are also equal.

$\therefore$  The  $\triangle$ s  $AXT, TXB$  are equiangular.

(i) From (i) we have  $XA \cdot XT = XT \cdot XB$  [Th. 62]

(ii) From (ii) we have  $XA \cdot XB = XT^2$

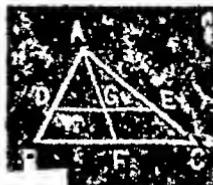
Similarly, if  $XCD$  be any other secant from  $X$  it may be proved that  $XC \cdot XD = XT^2$

$\therefore XA \cdot XB = XC \cdot XD = XT^2$

$\therefore$  If two chords of a circle, when produced, cut at a point outside it, the rectangles contained by their segments are equal. And each rectangle is equal to the square on the tangent from the point of intersection [Th. 58]

### Exercises on Page 267.

1. Let  $DE$  be any st line parl. to the base  $BC$  and terminated by the other two sides of the  $\triangle ABC$ , and let  $AF$  be its median through  $F$  cutting  $DE$  in  $G$ . It is required to prove that  $DG = EG$ .



Since  $DG$  is parl. to  $BF$ , hence the  $\Delta$ s  $ADG, ABF$  are equiangular

$$\therefore DG \cdot BF = AG \cdot AF$$

Again since  $GE$  is parl. to  $FC$ , hence the  $\Delta$ s  $AGE, AFC$  are equiangular.

$$\therefore GE \cdot FC = AG \cdot AF$$

$$\therefore DG \cdot BF = GE \cdot FC, \text{ But } BF = FC [\text{Hyp.}], \therefore DG = GE.$$

2. Let  $ABC, A'B'C'$  be two equiangular triangles, then if  $p, p'$  denote the perp from  $A, A'$  to the opp. sides,  $R, R'$  their circumradii, and  $r, r'$  their in-radii, it is required to prove that each of the ratios  $p:p', R:R', r:r'$  is equal to the ratio of any pair of corresponding sides..

(i) Draw  $AD, A'D'$  perp. from  $A, A'$  to the opp. sides. Then in the  $\Delta$ s  $ABD, A'B'D'$  since  $\angle ABD = \angle A'B'D'$  [Hyp.],  $\angle ADB = \angle A'D'B'$  (each being a rt  $\angle$ ); hence their third angles are also equal, i.e. they are equiangular.

$$\therefore AD \cdot A'D' = AB \cdot A'B', \text{ or } p \cdot p' = AB \cdot A'B'$$

(ii) Let  $O, O'$  be their corresponding circum-centres. Join  $OB, OC$ , and  $O'B', O'C'$ . Then  $\angle BOC$  (at the centre) =  $2 \angle BAC$  (at the circumference), and similarly  $\angle B'O'C' = 2 \angle B'A'C'$  [Th. 38].

$$\text{But } \angle BAC = \angle B'A'C' [\text{Hyp.}], \therefore \angle BOC = \angle B'O'C'.$$

And since  $OB = OC$ , and  $O'B' = O'C'$ ;  $\therefore OB \cdot O'B' = OC \cdot O'C'$

$\therefore$  the  $\Delta$ s  $OCB, O'B'C'$  are similar (Th 64)

$$\therefore OB \cdot O'B' = BC \cdot B'C', R \cdot R' = BC \cdot B'C'$$

(iii) Let  $Q, Q'$  be their in-centres. Join



$BQ, B'Q'$ , and draw  $QE, Q'E'$  perp. to  $BC$  and  $B'C'$  respectively. Then  $BQ, B'Q'$  bisect the  $\angle s$   $ABC$  and  $A'B'C'$  respectively [Prob. 26], and hence  $\angle QBE = \angle Q'B'E'$ .

$\therefore$  In the  $\triangle s BQE, B'Q'E'$  because  $\angle QBE = \angle Q'B'E'$ ,  $\angle QE B = \angle Q'E' B'$ ; hence their third angles are also equal, i.e. they are equiangular.

$$\therefore QE \cdot Q'E' = BE \cdot B'E'$$

Similarly it can be proved that  $QE \cdot Q'E' = CE \cdot C'E'$

$$\therefore QE \cdot Q'E' \hat{=} (BE + CE) : (B'E' + C'E') \quad [\text{Prop V, p. 251}] \\ = BC : B'C'$$

$$\text{or } r \cdot r' = BC : B'C'$$

But since the  $\triangle s ABC, A'B'C'$  are equiangular.

$$\therefore AB : A'B' = BC : B'C' = CA : C'A' \quad (\text{Th. 62})$$

$\therefore$  Each of the ratios  $p:p', R:R', r:r'$  is eqnal to the ratio of any pair of corresponding sides of the  $\triangle s ABC, A'B'C'$ .

3. Let  $D, E, F$  be the middle pts. of the sides  $AB, BC, CA$  of the  $\triangle ABC$ ; and let  $R, R'$  denote the circum-radius of the  $\triangle s DEF, ABC$ . It is required to prove that  $R = \frac{1}{2}R'$

Since each of the figures  $BF, CD$  and  $AE$  is a parallelogram, hence  $\angle DFE = \angle DBE$ ,  $\angle EDF = \angle ECF$ , and  $\angle DEF = \angle DAF$  [Th. 21].

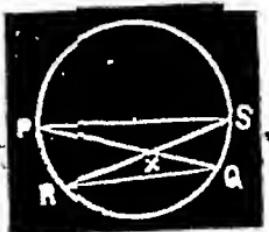
$\therefore$  The  $\triangle s DEF, ABC$  are equiangular.

$$\therefore R:R' = EF:AB \quad (\text{Proved in Ex. 2})$$

But  $EF = \frac{1}{2}AB$ ,  $\therefore R = \frac{1}{2}R'$



4. Let  $PQ, RS$  be two st. lines intersecting at  $X$  such that  $PX \cdot RX = SX \cdot QX$ ; then it is required to prove that (i)  $\triangle PXS, QXR$  are similar; and (ii) the pts.  $P, R, Q, S$  are concyclic.



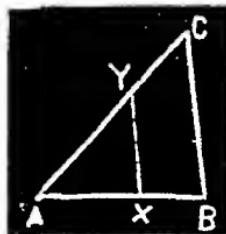
(i) In the  $\triangle PXS, QXR$  since  $\angle PXS = \angle QXR$  and the sides about these angles are proportional, for  $PX \cdot RX = SX \cdot QX$ . (Hyp)

$\therefore$  They are similar [Th. 64]

(ii)  $\therefore$  The angles opposite to the corresponding sides  $PX, RX$  are equal, i.e.  $\angle PSR = \angle PQR$ .

$\therefore$  The pts.  $P, R, Q, S$  are concyclic (Converse of Th. 39)

5. Let  $A, X, B$  be any three collinear points, and from  $X$  and  $B$  let two parl. st. lines  $XY, BC$  be drawn in the same sense such that  $XY \cdot BC = AX \cdot AB$ . Then shall the pts.  $A, Y, C$  be collinear.



Join  $AY, AC$ . Then in the  $\triangle s, AXY, ABC$  because the  $\angle AXY =$  the corresponding  $\angle ABC$  (Th. 14), and the sides about them are proportional, for  $XY \cdot BC = AX \cdot AB$  (Hyp).

$\therefore$  the  $\triangle s AXY, ABC$  are similar (Th 64), so that  $\angle AYX = \angle ACB$ . And since  $XY$  is parl. to and in the same sense as  $BC$ .

$\therefore$  The pts.  $A, Y, C$  are collinear.

6. If  $ABC A'B'C'$  be two triangles such that  $\angle B = \angle B'$ , and,

Fig. (i)

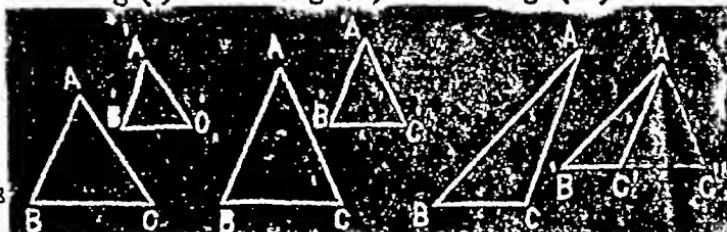
$$\frac{c}{c'} = \frac{b}{b'}$$

then  
either  
the angles

Fig. (ii)



Fig. (iii)



$C, C'$  are equal or supplementary (Th 65)

(i) If  $c$  is less than  $b$ , as shown in Fig. (i) then  $c'$  is less than  $b'$ ; and hence  $\angle s C, C'$  are less than  $\angle s B, B'$  respectively

$\therefore \angle s C, C'$  are both acute, hence in this case  $\angle C = \angle C'$

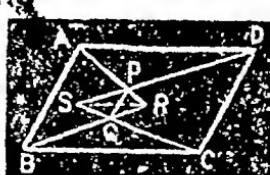
(ii) If  $c = b$ , as shown Fig. (ii) then  $c' = b'$ , and hence  $\angle C = \angle B$ , and  $\angle C' = \angle B'$

$\therefore \angle s C, C'$  are both acute, hence in this case also  $\angle C = \angle C'$

(iii) If  $c$  is greater than  $b$ , as shown in Fig. (iii) then  $c'$  is greater than  $b'$ ; and hence  $\angle s C, C'$  are greater than  $\angle s B, B'$  respectively

$\therefore$  Of the  $\angle s C, C'$ , they may be both acute or both obtuse (and hence equal), or one acute and the other obtuse (and hence supplementary).

7. Let  $ABCD$  be a parlm, and  $P, Q$  two points in a straight line parl to  $AB$ , also let  $PA$  and  $QB$  meet at  $R$ , and  $PD$  and  $QC$  at  $S$ .



It is required to prove that  $RS$  is parl. to  $AD$

Since  $PQ$  is parl. to  $AB$ , the  $\triangle s PQR, ABR$  are similar

$$\therefore PR : AR = PQ : AB$$

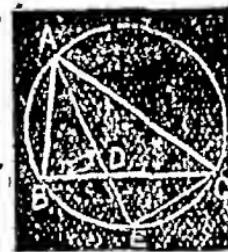
Again since  $PQ$  is pârâl to  $CD$ , the  $\triangle$ s  $PQS$ ,  $CSD$  are similar

$$PS:SD = PQ:CD = PQ:AB$$

$$PR:AR = PS:SD$$

$\therefore RS$  is pârâl to  $AD$  (Th. 60.)

3 Let  $ABC$  be a triangle and let the bisector of the vertical  $\angle A$  meet the base  $BC$  at  $D$  and the circum-circle at  $E$ .  $EC$  be joined, it is required to prove that  $\triangle$ s  $BAD$ ,  $EAC$  are similar, and that  $AB:AC = AE:AD$



Since  $\angle BAD = \angle CAE$ , and  $\angle ABD = \angle AEC$  in the same segment, hence the third angles of the  $\triangle$ s  $BAD$ ,  $EAC$  are also equal viz  $\angle ADB = \angle ACE$

$\triangle$ s  $BAD$ ,  $EAC$  are similar, and  $AB:AD = AE:AC$ , so that  $AB:AC = AE:AD$ .

### Exercises on Page 269

1. Let  $ABC$  be an equilateral triangle, each side of which  $= a$ . Produce  $BC$  both ways to the pts  $P$ ,  $Q$  such that  $BP = CQ = a$ , and join  $AP$ ,  $AQ$ . It is required to prove that (i)  $PQ:PA = PA:PB$ , and (ii)  $PA^2 = 3a^2$



Since the  $\angle ABC = \angle APB + \angle PAB$  (Th. 16.)

$$= 2\angle APB \quad [AB = BP]$$

∴ each of the  $\angle APB$ ,  $PAB = \frac{1}{2} \angle ABC = 30^\circ$

Similarly it may be proved that  $\angle AQC = 30^\circ$

In the  $\triangle$ s  $APB$ ,  $APQ$  because the  $\angle P$  is common, and  $\angle PAB = \angle AQP = 30^\circ$  (Proved), hence their third angles are also equal.

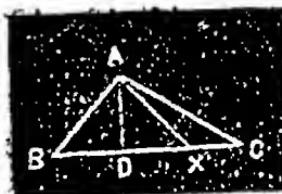
. They are equiangular, and hence the sides about equal  $\angle s$  at  $P$  must be proportional (Th 62).

$$(i) \therefore PQ \cdot PA = PA \cdot PB.$$

$$(ii) \text{ And } \therefore PA^2 = PQ \cdot PB$$

$$\text{i.e. } PA^2 = 3a \times a, \text{ or } 3a^3 \quad [\because PQ = PB + BC + CQ = 3a]$$

2. Let  $ABC$  be a triangle right-angled at  $A$ , such that  $AB=3''$  and  $AC=4''$ ; and let  $AD$  be perp to  $BC$ . It is required to find  $BD$  and  $CD$ .



Since  $BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{9+16} = 5'$ , and  $AC^2 = BC \cdot CD$  (Th 66, Cor m), that is,  $9 = 5 \cdot CD$

$$\therefore CD = 1\frac{8}{5}'' \text{, and } BD = BC - CD = 5'' - 1\frac{8}{5}'' = 3\frac{2}{5}''$$

### 3. See Figure Ex. 2.

It is required to prove that  $BC \cdot AD = AB \cdot AC$

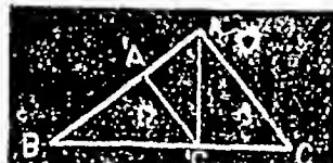
(i) Since the area of the  $\triangle ABC = \frac{1}{2} BC \cdot AD$ , also  $= \frac{1}{2} AB \cdot AC$  (Th 25)

$$\therefore BC \cdot AD = AB \cdot AC.$$

(ii) Since the  $\triangle ABC, ACD$  are similar (Th 66), hence the corresponding sides about the equal  $\angle s$   $ABC, CAD$  must be proportional.

$$AC \cdot BC = AD \cdot AB, \text{ and } \therefore BC \cdot AD = AB \cdot AC.$$

4. Let  $ABC$  be a triangle right-angled at  $A$ , and let  $AC'$  be drawn perp to  $BC$ . From  $C'$  draw  $C'A'$  parl. to  $CA$ . Then if  $AC = 15\text{cm}$ , and  $AB = 20\text{cm}$ , it is required to shew that  $AC' = 12\text{cm.}$ , and  $A'C' = 9.6\text{ cm}$



$$BC = \sqrt{AC^2 + AB^2} = \sqrt{225 + 400} = 25 \text{ cm.}$$

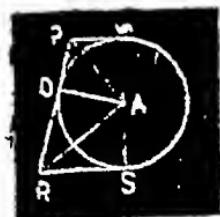
Since the  $\triangle s ACC'$ ,  $ACB$  are similar (Th. 66), hence the corresponding sides about the equal  $\angle s CAC'$ ,  $ABC$  must be proportional

$$\therefore AC' AC = AB BC, \text{ and } BC AC' = AB AG, \text{ or } 25 \times AC' = 15 \times 20 \quad . \quad AC' = 12 \text{ cm.}$$

In the  $\triangle s ACC'$ ,  $AA'C'$  because  $\angle CAC' = \text{alt. } \angle AC'A'$ , and  $\angle AC'C = \angle AA'C'$  (each being right), hence they are equiangular.

$$\therefore A'C' AC' = AC' AC, \text{ and } AC' A'C' = AC'^2, \text{ or } 15 \times A'C' = 12 \times 12, \quad . \quad A'C' = 9.6 \text{ cm.}$$

5 Let  $QAS$  be a diameter of a circle whose radius =  $r$ , and let the tangents at  $Q$  and  $S$  meet any third tangent at  $O$  in the pts  $P$  and  $R$  respectively. Join  $PA$ ,  $AR$ , then shall  
 (i) the  $\angle PAR$  be a right angle and (ii)  $OP \cdot OR = r^2$ .



(i) Since  $\angle OAP = \angle QAP$ , and  $\angle OAR = \angle SAR$  (Th. 47.),

$$\angle PAR = \angle PAO + \angle RAO$$

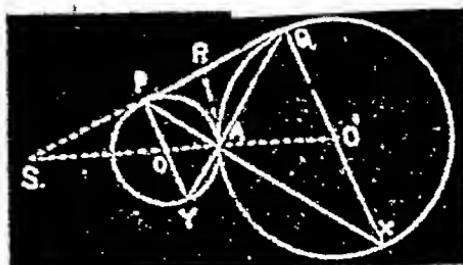
$$= \frac{1}{2} \angle OAQ + \frac{1}{2} \angle OAS = \text{a rt angle} \quad (\text{Th 1})$$

(ii) Since  $\angle AOP$  is a rt angle (Th 46), and the  $\angle PAR$  is also a right angle.

In the right-angled  $\triangle APR$ , since  $AO$  is perp from the right-angle to the hypotenuse, (Th 66)

$$\therefore OP \cdot OR = OA^2 = r^2.$$

6 Let two circles whose centres are  $O, O'$  and whose radii  $r$  and  $r'$  respectively have an external contact at  $A$ , and let  $PQ$  be a common tangent to them. Join



$PA, QA$  then shall (i) the  $\angle PAQ$  be a right angle, and  
(ii)  $PQ^2 = 4rr'$ .

(i) Let the common tangent at  $A$  meet  $PQ$  at  $R$ . Then since  $RP, RA$  are two tangents from  $R$  to the circle  $O$ , hence  $PR=AR$ . Similarly  $QR=AR$  (Th 47, Cor.)

$$\therefore \angle APR = \angle PAR, \text{ and } \angle AQR = \angle QAR$$

$$\therefore \angle PAQ = \angle APQ + \angle AQP, \text{ and is therefore a rt. angle.}$$

(ii) Produce  $PA, QA$  to meet the circumferences at  $X$  and  $Y$ . Then  $\angle PQY = \angle PXQ$  in the alternate segment (Th 49), and  $\angle QPX = \angle PYQ$  in the alternate segment (Th 49).

$\therefore$  the third angles of the  $\triangle$ s  $PQX, PQY$  are also equal, hence they are equiangular,  $\therefore PY \cdot PQ = PQ \cdot QX$  (Th. 62),

$$\therefore PQ^2 = PY \cdot QX$$

$$= 2r \times 2r' = 4rr' [\because \angle PAY, QAX \text{ are rt. angles}]$$

### 7. See Figure Ex. 6.

Let  $QP$  meet  $O'O$  produced meet at  $S$ . It is required to prove that (i)  $\triangle SAP, SQA$  are similar, and (ii)  $SA^2 = SP \cdot SQ$

Since  $\angle PAQ$  is a rt. angle (Proved in Ex. 6), hence  $\angle AQP$  is the complement of  $\angle APQ$ , but  $\angle APR$ , or  $\angle APQ = \angle PAR$ , hence  $\angle AQP$  is the complement of  $\angle PAR$ .

Again since  $\angle SAR$  is a rt. angle (Th. 46), hence  $\angle PAS$  is the complement of  $\angle PAR$ .

$\therefore \angle PAS = \angle AQP$ , or  $\angle AQS$ .

And the angle at S is common to the  $\triangle s SAP, SQA$ , hence their third angles are also equal.

$\therefore$  They are equiangular; and hence similar (Th. 62.)

(ii)  $\therefore SP SA = SA SQ$ ; and  $\therefore SA^2 = SP \cdot SQ$ .

8. Let two circles intersect at A and B; and let the tangents at B meet the circumferences at P and Q. Join AP, AQ, then it is required to prove that  $AP \cdot AB = AB \cdot AQ$ .



Since  $\angle ABP = \angle AQB$  in the alternate segment (Th. 49) and  $\angle ABQ = \angle APB$  in the alternate segment (Th. 49.)

$\therefore$  the third angles of the  $\triangle s ABP, ABQ$  are also equal, and hence they are equiangular.

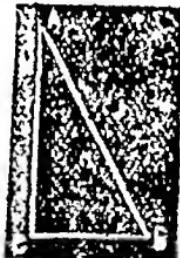
$\therefore AP \cdot AB = AB \cdot AQ$  (Th. 62.)

### Exercises on page 271.

1. Let ABC be a triangle right angled at C, such that  $a=8$ ,  $b=15$ .

It is required to find c, and the values of Sin A, Cos A, and Tan A.

$$\text{and } \tan c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{64 + 225} = 17.$$



$$\therefore \sin A = \frac{a}{c} = \frac{8}{17}, \cos A = \frac{b}{c} = \frac{15}{17},$$

$$\text{and } \tan A = \frac{a}{b} = \frac{8}{15}.$$

2. See figure Ex. 1.

If  $a=12$ ,  $b=35$ . It is required to find c, and the trigono-

( 29 )

metrical ratios of the smaller angle A.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{144 + 1225} = 37.$$

$$\therefore \sin A = \frac{a}{c} = \frac{12}{37}, \cos A = \frac{b}{c} = \frac{35}{37}, \text{ and } \tan A = \frac{a}{b} = \frac{12}{35}$$

$$\cot A = \frac{b}{a} = \frac{35}{12}, \sec A = \frac{c}{b} = \frac{37}{35}, \text{ and } \operatorname{cosec} A = \frac{c}{a} = \frac{37}{12}$$

### 3. See figure Ex. 1.

It is required to prove (i)  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$  and (ii)  $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$

(i) Since  $a^2 + b^2 = c^2$ , hence dividing each side of the equation by  $c^2$ , we have  $\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$ ; or  $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ .

(ii) Again since  $c^2 = a^2 + b^2$ ; hence dividing each side of the equation by  $b^2$ , we have  $\frac{c^2}{b^2} = \frac{a^2}{b^2} + 1$ ; or  $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$ .

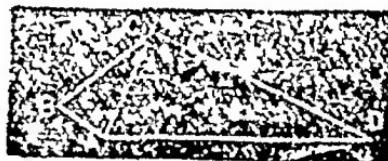
4 Take a line  $AC = 36$  cm. and draw  $AB, CD$  prep. to  $AC$  in opposite directions making  $AB = 1.5$  cm. Join  $BC$ , and with centre  $A$  and radius  $8.5$  cm. draw an arc cutting  $CD$  at  $D$ . Join  $AD$ . Then  $ABCD$  is the required quadrilateral.

It is required to find  $\sin ABC$ ,  $\tan ACB$ ,  $\cos CDA$ ,  $\tan DAC$ .

$$\text{Since } BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{2.25 + 12.96} = 3.9 \text{ cm. [T.d. 29]}$$

$$\text{and } DC = \sqrt{AD^2 - AC^2} = \sqrt{72.25 - 12.96} = 7.7 \text{ cm. }$$

$$\therefore \sin ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{36}{3.9} = \frac{12}{1.3}, \quad \tan ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{1.5}{3.9} = \frac{5}{13}$$



( 30 )

$$\cos CDA = \frac{CD}{AD} = \frac{77}{85} = \frac{77}{85}, \quad \tan DAC = \frac{CD}{AC} = \frac{77}{36} = \frac{77}{36}$$

**5 See figure Ex 1.**

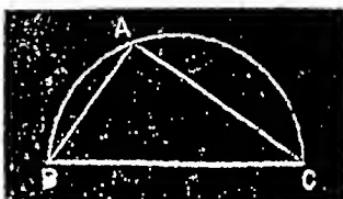
Since  $B=90^\circ-A$ ,  $\therefore \sin(90^\circ-A) = \sin B = \frac{AC}{AB} = \cos A$ .

$$\text{and } \tan(90^\circ-A) = \tan B = \frac{AC}{BC} = \cot A.$$

**6 It is required to construct an angle whose sine is 6**

Take a line  $BC = 10$  units, and

describe a semi-circle upon it as diameter With centre B and radius = 6 units draw an arc cutting the semi-circle at A Join AC, then  $\angle ACB$



is the required angle; for  $\angle BAC$  is a rt angle (Th 41)

$$\sin \angle ACB = \frac{AB}{BC} = \frac{6}{10} = 6$$

**7 It is required to construct an acute angle A if (i)  $\tan A = 7$**   
**(ii)  $\cos A = 9$  (iii)  $\sin A = -71$**



(i) Take a line  $AC = 10$  units, and draw  $CB$  perp to it making  $CB = 7$  units Join AB then  $\angle BAC$  is the required angle, for  $\tan BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{7}{10} = 7$

(ii) Take a line  $AB = 10$  units, and upon it as diameter describe a semi-circle. With centre A and radius = 9 units draw an arc cutting the semi-circle at C Join AC, BC; then  $\angle BAC$  is the required angle for  $\angle ACB$  is right (Th 41)

$$\therefore \cos BAC = \frac{AC}{AB} = \frac{9}{10} = .9$$

(iii) Take a line  $AB = 100$  units, and upon it as diameter describe a semi-circle. With centre  $B$  and radius = 71 units draw an arc cutting the semi-circle at  $C$ . Join  $BC$ , then  $BAC$  is the required angle for  $\angle ACB$  is right (Th 41)

$$\therefore \sin BAC = \frac{BC}{AB} = \frac{71}{100} = .71.$$

Measure the angles obtained in cases (i), (ii), (iii), and notice that they =  $35^\circ$ ,  $26^\circ$ ,  $45^\circ$  respectively

### 8. See fig. Ex. 7 (i).

Construct an angle  $A$  such that  $\tan A = 1.6$ , as in the last exercise case (i)

Measure the  $\angle A$  and notice that it =  $58^\circ$

$$\text{Since } \tan A = \frac{BC}{AC} = 1.6, \text{ hence } BC = 1.6 AC$$

$$\therefore AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{AC^2 + 2.56AC^2} = 1.9 AC, \text{ (nearly)}$$

$$\therefore \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{1}{1.9} = .53 \text{ nearly}$$

### 9. It is required to prove that (i)

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \text{ and (ii)}$$

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



(i) Let  $ABC$  be an isosceles right angled at  $C$ . Then each of the  $\angle s ABC, BAC = 45^\circ$ , and  $AB^2 = AC^2 + BC^2 = 2BC^2$ .  $\therefore \frac{BC^2}{AB^2} = \frac{1}{2}$ , and  $\therefore \frac{BC}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Since  $\sin A = \frac{BG}{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ , and  $\cos B = \frac{BC}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$

$$\therefore \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

(ii) Let  $ABC$  be an equilateral triangle and  $AD$  perp. from  $A$  on  $BC$ . Then  $\angle ABD = 60^\circ$ , and  $\angle BAD = 30^\circ$ .

Since  $AD^2 = AB^2 - BD^2 = BC^2 - BD^2 = 4BD^2 - BD^2 = 3BD^2$ , and  $AB^2 = BC^2 = 4BD^2$

$$\therefore \frac{AD^2}{AB^2} = \frac{3BD^2}{4BD^2} = \frac{3}{4}, \text{ and } \therefore \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Since  $\sin ABD = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , and  $\cos BAD = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

**10** Construct an acute angle  $A$  such that  $\tan A = .81$  as in Ex 7 (i), and from one of its arms cut off  $AB = 10$  cm.

From  $B$  draw  $BC$  perp. to the other arm of the  $\angle A$ . Then  $ABC$  is the required right angled triangle, for the hypotenuse  $AB = 10$  cm.,  $\tan A = .81$

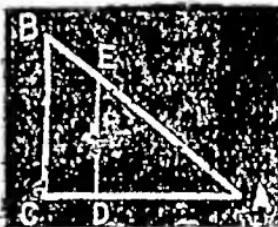
Measure  $AC$ , and the  $\angle A$ , and notice that  $AC = 7.8$  cm. and  $\angle A = 39^\circ$

$$\text{Since } BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = \sqrt{10^2 - 7.8^2} = 6.3 \text{ cm.}$$

$$\therefore \sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{6.3}{10} = .63, \text{ and } \cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{7.8}{10} = .78.$$

**11. See figure Ex. 10.**

Construct an acute angle  $A$  such that  $\tan A = .7$ , and from one of its arms cut off  $AC = 2.8$  cm.



At  $C$  draw a perp. to  $AC$  meeting the other arm of the  $\angle A$  at  $B$ . Then  $ABC$  is the required right angled triangle, for  $\angle C=90^\circ$  b $\frac{1}{2}$  2.8 cm will Tap  $A$   $\frac{1}{2} \angle A$

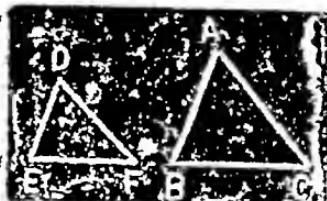
Measure  $AB$ , and the  $\angle A$ , and notice that  $AB=2.1$  cm, and the  $\angle A=35^\circ$ .

### Exercises on Page 273.

1 See solution given in your text book

2 Let  $ABC, DEF$  be two equiangular

triangles having  $AB$  corresponding to  $DE$ ,  $BC$  to  $EF$  and  $CA$  to  $FD$ . It is required to prove that  $AB \cdot BC \cdot CA = DE \cdot EF \cdot FD$



Since  $\frac{BC}{\sin A} = \frac{CA}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$  and  $\frac{EF}{\sin D} = \frac{FD}{\sin E} = \frac{DE}{\sin F}$  [Ex 1]

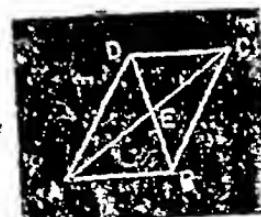
Alternately  $BC \cdot CA \cdot AB = \sin A \cdot \sin B \cdot \sin C$ ,

and  $EF \cdot FD \cdot DE = \sin D \cdot \sin E \cdot \sin F$

But  $A=D$ ,  $B=E$ ,  $C=F$ ,  $\sin A=\sin D$ ,  $\sin B=\sin E$ ,  $\sin C=\sin F$   
 $AB \cdot BC \cdot CA = DE \cdot EF \cdot FD$

3 See solution given in your text book

4 (i) Let  $a, b$  be two adjacent sides of a parallelogram  $ABCD$ , and  $B$  the included angle. It is required to find its area

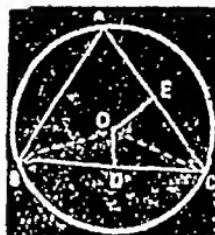


Draw the diagonal  $AC$ , then the area of  $ABCD=2$  the area of the  $\triangle ABC=ab \sin B$  (Ex 3)

(ii) Since rhombus is a parallelogram whose adjacent sides are equal, hence if  $a$  be one side and  $A$  one angle, given, then its area  $= a^2 \sin A$  [from case (i)]



- 5 Let  $O$  be the centre of the circum-circle of the  $\triangle ABC$ . Draw  $OD \perp BC$ , and join  $OC, OB$ . Then



$$\sin BOD = \frac{BD}{OB} = \frac{2BD}{2OB} = \frac{a}{2R}, \quad R = \frac{a}{2 \sin BOD}$$

But  $\angle BOD = \frac{1}{2} \angle BOC = \angle BAC$  (Th. 38)

$$\therefore R = \frac{a}{2 \sin BAC} = \frac{a}{2 \sin A} \quad (\text{i})$$

Again if  $\Delta$  denotes the area of the  $\triangle ABC$ , then

$$\Delta = \frac{1}{2}bc \sin A \quad (\text{Ex. 8}), \quad \sin A = \frac{2\Delta}{bc}$$

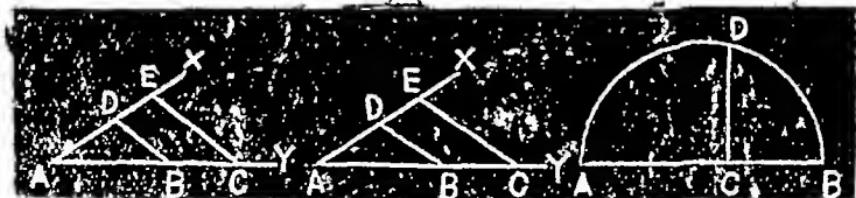
$$\therefore \frac{a}{2 \sin A} = \frac{abc}{4\Delta} \quad (\text{ii})$$

$$\text{From (i) and (ii) we have } R = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{abc}{4\Delta}$$

- 6 See solution given in your text book

### Exercises on Page 278

- 1 Let  $AX, AY$  be any two st. lines of indefinite length  
 Fig. (i)                      Fig. (ii)                      Fig. (iii)



containing any convenient angle between them.

(1) From  $AY$  cut off  $AB=24"$ , and  $BC=15"$ , and from  $AX$  cut off  $AD=16"$

Join  $BD$ , and draw  $CE$  parl to  $BD$  meeting  $AX$  in  $E$ .  
 Then  $DE$  is the fourth proportional to  $AB, BC$ , and  $AD$  (Prob. 35)

Measure  $DE$ , and notice that it = 1"

Arithmetically.  $2 \cdot 4' : 1 \cdot 5' :: 1 \cdot 6'' : x''$ ,

$$\text{whence } 2 \cdot 4 \times x = 1 \cdot 5 \times 1 \cdot 6, \text{ or } x = 1''$$

(ii) From  $AY$  cut off  $AB = 2 \cdot 5'$  and  $BC = 1 \cdot 5'$ ; and from  $AX$  cut off  $AD = 1 \cdot 5''$ .

Join  $BD$ , and draw  $CE$  *parl.* to  $BD$  meeting  $AX$  in  $E$ . Then  $DE$ , is the third proportional to  $AB$  and  $BC$  (Prob. 36)

Measure  $DE$ , and notice that it = .9"

Arithmetically  $2 \cdot 5' : 1 \cdot 5' :: 1 \cdot 5'' : x''$

$$\text{whence } 2 \cdot 5 \times x = 1 \cdot 5 \times 1 \cdot 5, \text{ or } x = .9''$$

(iii) Take a st. line  $AC = 7 \cdot 2$  cm., and produce it to  $B$  making  $CB = 5$  cm. Upon the diameter  $AB$  describe a semi-circle, and draw  $CD$  *perp.* to  $AB$  meeting the semi-circle in  $D$ .

Then  $CD$  is the mean proportional between  $AC$  and  $CB$  (Prob. 38.)

Measure  $CD$ , and notice that it = 6 cm.

Arithmetically.  $7 \cdot 2 : x :: x : 5$

$$\text{whence } x^2 = 7 \cdot 2 \times 5 = 36, \text{ or } x = 6 \text{ cm}$$

2 Take a line  $AB = 2''$ , and draw a line  $AZ$  of indefinite length making any convenient angle with  $AB$ . From  $AZ$  cut off  $AD = 7$  units; and from  $DZ$ ,  $DA$  cut off  $DC, DE$  each = 3 units.



Join  $BC, BE$ , and draw  $DX, DX'$  *parl.* to  $BC, BE$  meeting  $AB$  and  $AB$  produced in the pts.  $X$  and  $X'$  respectively. Then  $AB$  is divided internally at  $X$  and externally at  $X'$  in the ratio 7:3 (Prob. 37.)

Measure  $AX, BX$ ; and  $AX', BX'$ , and notice that  $AX = 1 \cdot 4''$ ,  $BX = 6''$ ,  $AX' = 3 \cdot 5''$  and  $BX' = 1 \cdot 5''$ .

Since  $AC = AD + DC = 7 + 3 = 10$ , and  $AB \cdot AX = AC \cdot AD$ , or  $2 \cdot AX = 10 \cdot 7 \therefore AX = 1 \cdot 4''$ ; and  $\therefore BX = AB - AX = 2 - 1 \cdot 4 = 6''$

Again since  $AE = AD - DE = 7 - 3 = 4$ , and  $AX' \parallel AB = AD : AE$ , or  $AX' = 7 : 4$ , whence  $AX' = 8.5''$ , and  $\therefore BX' = AX' - AB = 3.5'' - 2'' = 1.5''$

### 3. See fig. Ex. 1.

In Ex. 1, Fig. (i) make  $AB = 1''$ ,  $BC = 1.6''$ , and  $AD = 1.25''$ , then  $DE$  will represent  $x$  and will measure  $2''$ .

Arithmetically  $x^2 = 1.25 \times 1.6$ , whence  $x = 2$ .

In Ex. 1, Fig. (ii) make  $AB = 6.3$  cm, and  $BC, AD$  each  $= 4.2$  cm, then  $DE$  will represent  $x$  and will measure  $2.8$  cm.

Arithmetically  $6.3 \times x = 4.2 \times 4.2$ , whence  $x = 2.8$  cm.

In Ex. 1, Fig. (iii) make  $AC = 1.6$  and  $CB = 2.5$ , then  $CD$  will represent  $x$ , and will measure  $2''$ .

Arithmetically  $x^2 = 1.6 \times 2.5 = 4$ , whence  $x = 2$ .

4. Take a line  $AB = 7.2$  cm, and draw a line  $AX$  of indefinite length, making any convenient angle with  $AB$ . From  $AX$  cut off  $AC, CD, DE = 2, 3$  and  $4$  units of length respectively.



Join  $BE$ , and draw  $CG, DF$  each parallel to  $BE$  meeting  $AB$  in the pts  $G$  and  $F$ . Then  $AB$  is divided at  $G$  and  $F$  into segments proportional to  $2, 3$ , and  $4$  [Prob. 37, Cor].

Measure these parts, and notice that  $AG = 1.6$  cm,  $GF = 2$  cm, and  $FB = 3.2$  cm.

Since  $AC = 2$ ,  $AD = 5$ , and  $AE = 9$  units of length; and  $AB : AG = AE : AC$  or  $7.2 : AG = 9 : 2$ ,

$$\therefore AG = 7.2 \times 2, \text{ whence } AG = 1.6 \text{ cm}$$

Again since  $AB : AF = AE : AD$ , or  $7.2 : AF = 9 : 5$ ,

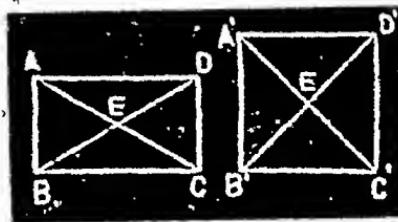
$$\therefore 9AF = 5 \times 7.2, \quad AF = 4, \text{ and } \therefore GF = AF - AG = 4 - 1.6 = 2.4 \text{ cm}$$

$$\therefore BF = AB - AF = 7.2 - 4 = 3.2 \text{ cm}$$

**5 See fig. Ex: 4**

Because the second part =  $\frac{2}{3}$  of the first, and the third =  $\frac{1}{4}$  of the second, hence the first : the second : the third = 6 : 4 : 3  
Hence take a line  $AB = 3\text{ }9''$ , and divide it into three parts proportional to 6, 4, 3; [as in Ex. 4]

6. Let  $A'B'C'D'$  be a given square on a side  $A'B' = 2''$ . It is required to construct a rectangle  $ABCD$  on a side  $AB = 1\text{ }5''$  such that it may be equal in area to the sq  $A'B'C'D'$ .



Draw  $AD, BC$  perp to  $AB$  making each = the 3rd proportional to  $AB$  and  $A'B'$ , and join  $CD$ .

Then  $ABCD$  is the required rectangle, for  $AB \cdot BC = A'B' \cdot BC$  when  $AB, BC = A'B'$ , that is the rect  $ABCD$  = the sq  $A'B'C'D'$ .

$$BC = \frac{A'B'^2}{AB} = \frac{2 \times 2^2}{1.5} = 2.7'' \text{ nearly}$$

Measure  $BC$ , and notice that it = 2.7''.

7. (i) Find the mean proportional between 3 and 1 [as in Ex. 1 (iii)], then it will represent graphically the value of  $\sqrt{3}$ .

For if  $x = r$ , then  $x^2 = 3 \times 1$ , whence  $r = \sqrt{3}$ .

- (ii) Find the mean proportional between 5 and 2 as above, then it will represent graphically the value of  $\sqrt{10}$ .

- (iii) Find the mean proportional between 2 and  $\frac{7}{5}$ , or 2 and 1.4, then it will present graphically the value of  $\sqrt{\frac{14}{5}}$ .

**8. See fig Ex. 1**

- (i) Find the fourth proportional to 2.8, 3.5, and 2.4 [as in Ex. 1, (i)], then it will represent the required value, for if

$it = x$ , then  $2 \cdot 8 \cdot 3 = 2 \cdot 4 x$ , whence  $x = \frac{3 \cdot 5 \times 2 \cdot 4}{2 \cdot 8} = 3$

Measure the fourth proportional thus found, and notice that it = 3

(ii) Since  $\frac{6 \cdot 84}{2 \cdot 13} = \frac{6 \cdot 84 \times 1}{2 \cdot 13}$ , hence find the fourth proportional to  $2 \cdot 13$ ,  $6 \cdot 84$  and 1; then it will represent the required value as in case (i)

(iii) Find the fourth proportional to  $1 \cdot 51$ ,  $2 \cdot 71$  and  $1 \cdot 26$ , then it will represent the value of  $\frac{2 \cdot 71 \times 1 \cdot 26}{1 \cdot 51}$  as in case (i)

9. Fig (i)

Fig (ii)

Fig (iii)



(i) Since  $\frac{a}{3} = \frac{b}{4} = \frac{c}{5}$ , hence  $a:b:c = 3:4:5$

Take a line  $DE = 4 \cdot 8"$ , and divide it at  $B$  and  $A$  in three parts proportional to the numbers 3, 4 and 5

With centres  $B$  and  $A$ , and radii  $BD$  and  $AE$  respectively draw two arcs intersecting at  $C$ . Join  $CA$ ,  $CB$ , then  $ABC$  is the required triangle

Measure the sides, and notice that  $a = 1 \cdot 2"$ ,  $b = 1 \cdot 6"$  &  $c = 2"$

By calculation  $\frac{a}{3} = \frac{a+b+c}{3+4+5} = \frac{4 \cdot 8}{12}$ , hence  $a = \frac{4 \cdot 8 \times 3}{12} = 1 \cdot 2"$

Similarly  $\frac{b}{4} = \frac{4 \cdot 8}{12}$ , and  $\frac{c}{5} = \frac{4 \cdot 8}{12}$ , hence  $b = 1 \cdot 6"$ , and  $c = 2"$

(ii) Because  $a = \frac{5}{3}b$ ,  $b = \frac{4}{5}c$ , hence  $a:b:c = 10:12:15$

∴ Construct a triangle  $ABC$  whose perimeter = 11.1 cm and  $a:b:c = 10:12:15$  as in case (i).

Measure the sides, and notice that  $a=3$  cm.,  $b=3.6$  cm.,  $c=4.5$  cm verify your results by calculation as in case (i)

$$(ii) \text{ Since } \frac{A}{1} = \frac{B}{2} = \frac{C}{3} = \frac{A+B+C}{1+2+3} = \frac{180^\circ}{6} = 30^\circ,$$

$$\therefore A=30^\circ, B=60^\circ, \text{ and } C=90^\circ$$

Take a line  $DE=11.8$  cm At the pts.  $D$  and  $E$  make the angles equal to  $15^\circ$  and  $45^\circ$  respectively with their arms meeting at  $B$ .

At the pt.  $B$  make the  $\angle DBA=\angle EDB=15^\circ$ , and  $\angle EBC=\angle DEB=45^\circ$  Then  $ABC$  is the required triangle

$$\text{For } \angle A=\angle ADB+\angle DBA=15^\circ+15^\circ=30^\circ, \text{ and } \angle C=\angle CEB+\angle EBC=45^\circ+15^\circ=60^\circ; \text{ hence the third } \angle B=90^\circ.$$

Measure the sides, and notice that  $a=2.5$  cm.,  $b=4.3$  cm.,  $c=5$  cm Since  $ABC$  is a rt angled triangle having  $\angle A=30^\circ$  and  $\angle B=60^\circ$ , hence  $a=\frac{1}{2}c$ , and  $b=\frac{\sqrt{3}}{2}c$ , and :  $a:b:c=1:\sqrt{3}:2$

$\therefore$  The lengths of the sides  $a, b, c$  can be known by calculation as in case (i)

(iv) Draw any two lines  $DE, DC$  at right angles to each other, making  $DE, DC=3$  and  $5$  units of length respectively

Join  $CE$ , and produce it to  $B$  making  $CB=4"$ . From  $B$  draw  $BA$  perp to  $CD$  produced Then  $ABC$  is the required triangle

For  $\angle A=90^\circ$ , the side  $BC=4"$ , and  $AC:AB=DC:DE=5:3$

Measure the sides  $b, c$ , and notice that  $b=3.4"$ , and  $c=2.1"$

By calculation since  $b:c=5:3$ , hence  $c=\frac{3}{5}b$ ,  $\therefore c^2=\frac{9}{25}b^2$  and since  $b^2+c^2=a^2$ ,  $\therefore b^2+\frac{9}{25}b^2=16$ , or  $\frac{34}{25}b^2=16$

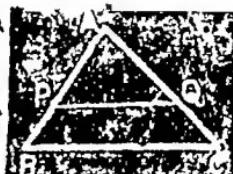
$$\therefore b^2=\frac{16 \times 25}{34}, \therefore b=\frac{4 \times 5}{\sqrt{34}}=3.4",$$

$$\text{and } \therefore c=\frac{3}{5}b=\frac{3}{5} \times 3.4"=2.1".$$

## Exercises on page 279.

1. Construct a  $\triangle ABC$ , in which  $a=8$  cm,  $b=5.6$  cm,  $c=6.4$  cm. Then the  $\triangle ABC$  represents the field

If  $a$  represents 200 metres, then since  $a:b=8:5.6$ , and  $a:c=8:6.4$



$$\therefore b = \frac{5.6}{8} a = \frac{5.6}{8} \times 200 = 140 \text{ m.}$$

$$\text{And } c = \frac{6.4}{8} a = \frac{6.4}{8} \times 200 = 160 \text{ m.}$$

(ii) From  $AB$  cut off  $AP=4$  cm, and draw  $PQ$  parallel to  $BC$ . Then  $PQ$  represents the length of the fence.

Since the  $\Delta s APQ, ABC$  are similar  $\therefore AP:AB=PQ:BC$

$$\therefore PQ = \frac{AP \cdot BC}{AB} = \frac{4 \times 8}{6.4} = 5$$

Again since  $BC$  represents 200 m, and  $PQ:BC=5:8$ ,

The real length of the fence  $= \frac{5}{8} \times 200 = 125$  m.

2. Take any st line  $AB=8$  units of length, and from it cut off  $AX=\frac{1}{7}$  units of length. Hence while  $A$  travels the distance  $AB$ ,  $B$  travels only  $AX$ , therefore  $BX$  represents the distance by which  $A$  beats  $B$  in a race of 8 unit of length.

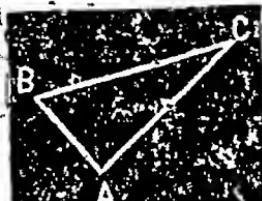


At the pt  $A$  make any convenient angle  $BAC$ , and let  $A$  represent 100 yards. Join  $BC$ , and draw  $XY$  parallel to  $BC$  meet  $AC$  in  $Y$ . Then  $CY$  represents the distance by which  $A$  beats  $B$  in a 100 yards race.

Since  $AX:AB=AY:AC$  [Th 62], and  $AX:BX=AY:CY$  [Th 62]

$$\therefore AB \cdot BX = AC \cdot CY, \therefore \frac{CY}{AB} = \frac{BX \cdot AC}{11 \times 100} = \frac{12\frac{1}{2}}{11 \times 100} = 12\frac{1}{2} \text{ yds}$$

3. From any pt  $A$  draw  $AB, AC$  in a  $N.W.$  and  $N.E.$  directions, making  $AB = 8"$ , and  $AC = 1\frac{1}{2}"$ , and join  $BC$ .

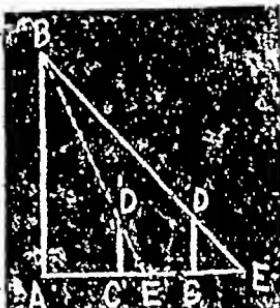


Since the  $\angle A$  is a rt angle,

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{64 + 2\frac{25}{16}} = 1.7"$$

In the scale of 1" to 25-miles,  $BC$  would represent  $1.7 \times 25$ , or  $42\frac{1}{2}$  miles.

4. (i) Let  $AB$  represent a lamp-post, and  $CD$  a man whose height is 6 ft. standing at a distance of 32 ft from  $AB$ . Join  $BD$  and produce it to meet  $AC$  produced in  $E'$ . Then  $CE'$  represents the shadow of the man, and is equal to 8 ft.



It is required to find the height of  $AB$ .

Since  $AE = AC + CE = 32 + 8 = 40$  ft, and the  $\triangle s ABE, CDE$  are similar

$$\therefore AB \cdot CD = AE \cdot CE, \text{ whence } AB = \frac{AE \cdot CD}{CE} = \frac{40 \times 6}{8} = 30 \text{ ft.}$$

- (ii) Let  $C'D'$  represent a boy 5 ft high standing at a distance of 20 ft from  $AB$ . Join  $BD'$ , and produce it to meet  $AC$  produced in  $E'$ . Then  $C'E'$  represents the shadow of the boy.

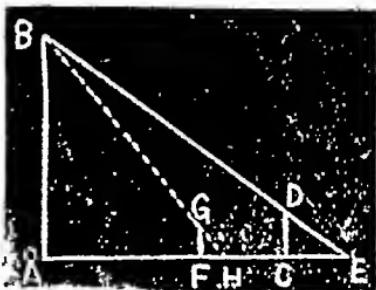
It is required to find  $C'E'$ .

Since the  $\triangle s ABE', C'D'E'$  are similar,

$$\therefore AB \cdot C'D' = AE' \cdot C'E', \text{ and } (AB - C'D') \cdot C'D' = (AE' - C'E') \cdot C'E'$$

$$\therefore C'E' = \frac{AC' \cdot C'D'}{(AB - C'D')} = \frac{20 \times 5}{(30 - 5)} = \frac{100}{25} = 4 \text{ ft}$$

5. (i) Let  $AB$  represent a lamp-post, and  $CD$  a man 6 ft high standing 15 ft from the post. Join  $BD$  and produce it to meet  $AC$  produced in  $E$ . Then  $CE$  represents the shadow of the man, and  $CE$



$= 5$  ft It is required to find the height of  $AB$ .

Since  $AE = AC + CE = 15 + 5 = 20$  ft, and the  $\triangle$ s  $ABE$ ,  $CDE$  are similar

$$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{AE}{CE}, \text{ whence } AB = \frac{AE \cdot CD}{CE} = \frac{20 \times 6}{5} = 24 \text{ ft}$$

- (ii) Let  $FG$  represent the man when he has approached 8 ft nearer to the post.  $AF = AC - CF = 15 - 8 = 7$  ft.

Join  $BG$ , and produce it to meet  $AF$  produced in  $H$ ; then  $FH$  represents the shadow of the man in the new position. It is required to find  $FH$

Since the  $\triangle$ s  $ABH$ ,  $FGH$  are similar,

$$\therefore AB \cdot FG = AH \cdot FH, \text{ and } (AB - FG) \cdot FG = (AH - FH) \cdot FH = AF \cdot FH$$

$$\therefore FH = \frac{AFFG}{(AB - FG)} = \frac{7 \times 6}{24 - 6} = \frac{42}{18} = 2 \text{ ft } 4 \text{ in}$$

6. Let  $CE$  represent the breadth of the canal, and  $CD$  the visible portion of the rod fixed vertically on the bank then  $CD = 4\frac{1}{4}$  ft.



Let  $AB$  represent the observer, whose eye is 5 ft 8 in above the ground, and when he has retired a distance  $AC$  at right-angles from the canal until  $D, E$  appear to be in one straight line to him. If  $AC = 20$  ft, it is required to find  $CE$ .

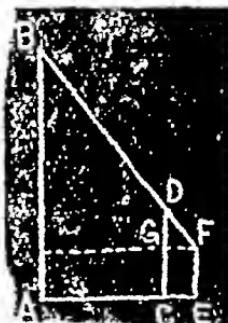
Since the  $\triangle$ s  $ABE$ ,  $CDE$  are similar,

$\therefore AB \cdot CD = AE \cdot CE$ , and  $(AB - CD) \cdot CD = (AE - CE) \cdot CE = AC \cdot CE$

$$\therefore CE = \frac{AC \cdot CD}{AB - CD} = \frac{20 \times 4\frac{1}{2}}{5\frac{1}{2} - 4\frac{1}{2}} = 60 \text{ ft}$$

7. Let  $AB$  represent the tower, and  $CD$  a staff 12 ft high fixed vertically in the ground at a distance of  $AC = 27$  ft from the tower.

Also let  $EF$  represent the man 5 ft. 4 in high, when he has retired a distance of  $CE = 3$  ft farther from the tower, and from where



he sees  $B$  and  $D$  in the same st line. It is required to find  $AB$

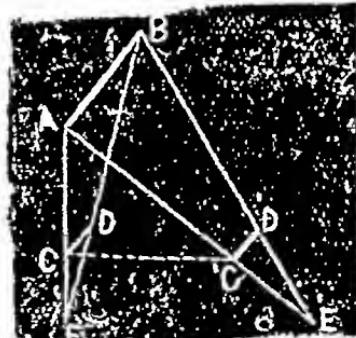
From  $F$  draw  $FGH$  paral. to  $AE$  cutting  $CD$  at  $G$ , and  $AB$  at  $H$ . Then  $DG = CD - CG = CD - EF = 12 - 5\frac{1}{4} = 6\frac{3}{4}$  ft, and  $FH = AE = AC + CE = 27 + 3 = 30$  ft

Since the  $\triangle$ s  $FGD$ ,  $F BH$  are similar,

$$\therefore FG : FH = GD : BH, \quad BH = \frac{FH \cdot GD}{FG} = \frac{30 \times 6\frac{3}{4}}{3} = 66\frac{2}{3} \text{ ft}$$

$$\therefore AB = BH + AH = BH + EF = 66\frac{2}{3} + 5\frac{1}{4} = 72 \text{ ft}$$

8. Let  $AB$  represent the lighthouse, and  $CD$  a man 6 ft. high standing due south of the house. Join  $BD$ , and produce it to meet  $AC$  produced in  $E$ . Then  $CE$  represents the shadow of the man, and is therefore equal to 24 ft



From  $C$  draw  $CC'$  perp. to  $AC$  towards the east, making  $CC' = 100$  yards = 300 ft. Let  $C'D'$  represent the new position of the man. Join  $BD'$ , and produce it to meet  $AC'$  produced in  $E'$ . Then  $C'E'$  represents the shadow of the man in the new position, and is therefore equal to 30 ft

*It is required to find  $\bar{AB}$*

Let  $AB=x$ , then since the  $\triangle$ s  $ABE$ ,  $CDE$  are similar

$$\therefore \frac{AB}{CD} = \frac{AE}{CE}, \text{ and } \frac{CD}{AE} = \frac{CE}{BE} \text{ or } \frac{6}{AE} = \frac{24}{x}, \\ AE = 4x$$

Again because the  $\triangle$ s  $ABE$ ,  $C'D'E'$  are similar

$$\therefore \frac{AB}{C'D'} = \frac{AE}{C'E'}, \text{ and } \frac{C'D'}{AE'} = \frac{A'E'}{BE'} \text{ or } \frac{6}{AE'} = \frac{30}{x}, \text{ on } AE' = 5x$$

$$\therefore AC = AE - CE = 4x - 24, \text{ and } AC' = AE' - C'E' = 5x - 30$$

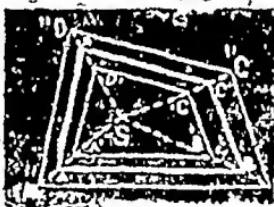
$$\therefore AC'^2 - AC^2 = (5x - 30)^2 - (4x - 24)^2 = (9x - 54)(x - 6) = 9(x - 6)^2$$

And since the  $\angle ACC'$  is a right angle,  $\angle ACC' = \angle AC'C = 90^\circ$

$$\therefore 9(x - 6)^2 = 300^2, \text{ or } 3(x - 6) = 300, \text{ or } x - 6 = 100, \therefore x = 106 \text{ ft}$$

### Exercises on page 284.

- 1 Take a line  $AB = 6.5$  cm, and at the pts.  $A$  and  $B$  make the  $\angle$ s  $\angle BAD = 80^\circ$ ,  $\angle ABC = 80^\circ$  and  $70^\circ$  such that  $AD = 4.4$  cm and  $BC = 3.2$  cm respectively. Join  $CD$ , then  $ABCD$  is the required quadrilateral.



- (i) Take any convenient pt'  $S$ , and join  $SA, SB, SC, SD$ . Divide  $SA$  internally at  $A'$  in the ratio  $3:4$ .

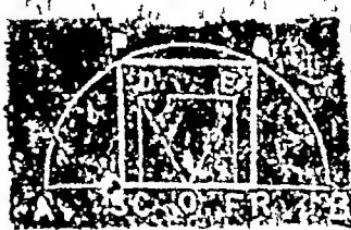
- From  $A'$  draw  $A'B'$  parl. to  $AB$ , meeting  $SB$  in  $B'$ , From  $B'$  draw  $B'C'$  parl. to  $BC$  meeting  $SC$  in  $C'$ , and from  $C'$  draw  $C'D'$  parl. to  $CD$  meeting  $SD$  in  $D'$ , and join  $AS'$ .

- Then  $A'B'C'D'$  is the reduced copy of  $ABCD$  such that the ratio of each side of  $A'B'C'D'$  to the corresponding side of  $ABCD$  is  $3:4$ .

- (ii) Divide  $SA$  externally at  $A''$  in the ratio  $5:4$ , and complete the figure  $A''B''C''D''$  as in case (i).

Then  $A'B'C'D'$  is the enlarged copy of  $ABCD$  such that the ratio of each side of  $A'B'C'D'$  to the corresponding side of  $ABCD$  is  $5:4$ .

2. Draw a semi-circle upon any line  $AB$  as diameter. It is required to describe a square in it, so that two vertices may be on the arc, and the other two on  $AB$ .



Bisect  $AB$  at  $O$ , and take any two points  $C, F$  at equal distances from  $O$ , and on either side of it. On  $CF$  describe a square,  $CDEF$ .

Join  $OD, OE$ , and produce them to meet the arc in the pts.  $P$  and  $Q$ . Join  $PQ$ , and draw  $PS, QR$  perp to  $AB$ . Then  $PQRS$  is the required square [Prob. 39, p. 282].

(ii) If  $AB=2r$ , and the side of the sq  $PQRS=a$ , then will  $5a^2=4r^2$ .

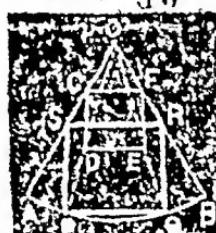
Because  $O^2=PS^2+OS^2$ , or  $r^2=a^2+\frac{a^2}{4}=\frac{5a^2}{4}$ ,  $\therefore 4r^2=5a^2$

3. Draw an  $\angle AOB=60^\circ$ , such that each of its arms  $OA, OB=24"$ . It is required to inscribe a square in the sector  $OAB$ .

Take any pt  $C$  in  $OA$ , and from  $OB$  cut off  $OF=OC$ . Join  $CF$ , and on  $CF$  describe a sq  $CDEF$ .

Join  $OD, OE$ , and produce them to meet the arc in the pts.  $P$  and  $Q$ . Join  $PQ$ , and draw  $PS, QR$  each parp to  $CD$ , meeting  $OA, OB$  in the pts.  $S$  and  $R$  respectively. Join  $SR$ , then  $PQRS$  is the required square [Prob. 39, p. 283].

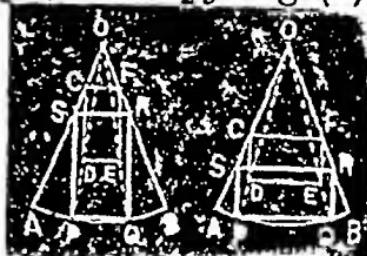
Measure  $PQ$ , and notice that it = 1.25".



If  $a$  be the side of the square and  $r$  the radius of the sector,  
Then  $a r = PQ$   $OA = 1.25 \cdot 2.4 = 0.52$

Fig. (i) R.F.  $\frac{9}{25}$  Fig. (ii)

4. Draw an  $\angle AOB = 45^\circ$ , such that each of its arms  $OA, OB = 5$  cm. It is required to inscribe in the sector  $OAB$  a rectangle having its adjacent sides in the ratio 2:1.



Take any pt  $C$  in  $OA$ , and from  $OB$  cut off  $OF = OC$ . Join  $CF$ , and draw  $CD$  perp to  $CF$ , making  $CD = 2 CF$  [as in Fig (i)], and  $CD = \frac{1}{2} CF$  [as in Fig (ii)], and complete the rectangle  $CDEF$ .

Then the ratio of the adjacent sides of the rect  $CDEF$  is in each figure as 2:1

Join  $OD, OE$ , and produce them to meet the arc in the pts  $P$  and  $Q$ . Join  $PQ$ , and draw  $PS, QR$  each parl to  $CD$  meeting  $OA, OB$  in the pts  $S$  and  $R$  respectively. Join  $SR$ , then  $PQRS$  is the required rectangle in each of the Figs. (i) and (ii) [Prob 39, p 283]

Thus it is clear that two such rectangles can be drawn. Measure  $PQ$  in Fig. (i), and  $PS$  in Fig. (ii), and compare them. You will find them in the ratio 31:28 nearly

R. F.  $\frac{3}{10}$

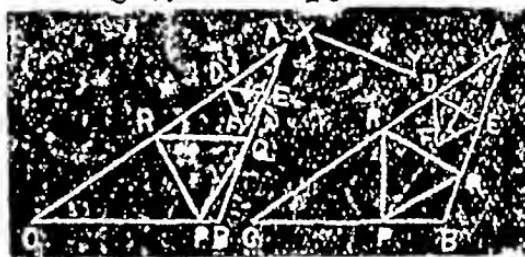
5. Construct a  $\triangle ABC$  having  $a = 8$  cm,  $b = 7$  cm, and  $c = 6$  cm [Prob 8]. It is required to inscribe a square in  $\triangle ABC$  such that two of its angular points may be in  $BC$ , and the other two in  $AB, AC$ .



Take any pt.  $G$  in  $AB$ , and draw  $GF$  parl. to  $BC$  meeting  $AB$  in  $F$ . On  $GF$  describe a square  $GDEF$

Join  $AD, AE$ , and produce them to meet  $BC$  in the pts.  $P$  and  $Q$ . From  $P$  and  $Q$  draw  $PS, QR$  each perp. to  $BC$  meeting  $AC$  in  $S$  and  $AB$  in  $R$ , and join  $SR$ . Then  $PQRS$  is the required square [Prob. 30, p 283].

Fig. (i) R. F  $\frac{3}{10}$  Fig (ii)

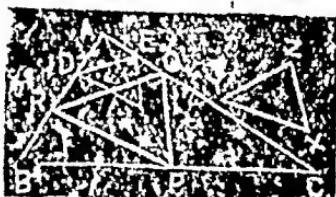


**6.** Take a line  $AB = 2.6''$ , and at the pts.  $B$  and  $C$  make the  $\angle s CBA, BCA = 110^\circ$  and  $85^\circ$  respectively, with their arms meeting at  $A$ . It is required to inscribe in  $\triangle ABC$  an equilateral triangle having (i) one side parl. to  $BC$ , and (ii) one side parl. to any given st. line  $XY$ .

Take any pt.  $D$  in  $AC$ , and draw  $DE$  parl. to  $BC$  [as in Fig. (i)] and  $DE$  parl. to  $XY$  [as in Fig (ii)] meeting  $AB$  in  $E$ . On  $DE$  describe an equilateral  $\triangle DEF$ .

Join  $AF$ , produce it to cut  $BC$  in  $P$ . From  $P$  draw  $PQ, PR$  parl. to  $FE, FD$  meeting  $AB, AC$  in the pts.  $Q$  and  $R$  respectively. Join  $QR$ , then  $PQR$  is the required equilateral triangle in both the Figs (i) and (ii). [Prob. 39 p 283]

**7.** Let  $ABC, XYZ$  be any two given triangles. It is required to inscribe in the  $\triangle ABC$  a triangle similar to the  $\triangle XYZ$ .



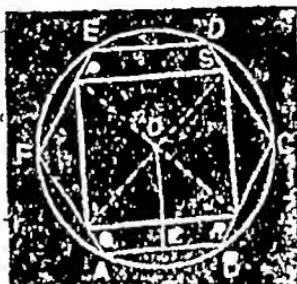
In  $AB$  take any pt.  $D$ , and draw  $DE$  parl to  $YZ$  meeting  $AC$  in  $E$ . From  $D$  and  $E$  draw  $DF, EF$  parl. to  $XY, XZ$  respectively, with

their arms meeting in  $E$ . Then  $\triangle DEF$  is similar to  $\triangle XYZ$

Join  $AF$ , and produce it, to meet  $BC$ , in  $P$ . From  $P$  draw  $PQ, PR$  parl. to  $FE, FD$  meeting  $AC, AB$  in the pts.  $Q, R$  respectively. Join  $QR$ , then  $PQR$  is the required triangle [Prob 38, p. 283].

It can be done in three ways, according as  $DE$  corresponds to  $XY, YZ$  or  $ZX$ .

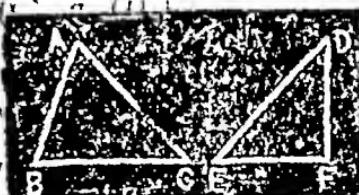
8. With any point  $O$  as centre and radius = 1.2" draw a circle, and place the chords  $AB, BC, CD, DE$  and  $EF$  each = 1.2" and join  $AF$ . It is required to inscribe in the hexagon  $ABCDEF$ , a square having two sides, part to  $AB$  and  $DE$ , and its vertices on the remaining sides of the hexagon.



Draw  $OZ$  perp. to  $AB$ , and draw the st. lines  $PGR, QOS$  on the oppo. sides of  $OZ$ , each making an angle =  $45^\circ$  with it, and meeting  $EF, FA, BG, CD$  in the pts.  $P, Q, R, S$  resp. Join  $PQ, QR, RS$ , and  $SP$ . Then  $PQRS$  is the required square.

### Exercises on page 287

1. Let  $ABC, DEF$  be two triangles of equal altitude standing on the bases  $BC, EF$  of 6.3" and 4" respectively. If the area of  $\triangle ABC = 12\frac{1}{2}$  sq. in. it is required to find the area of  $\triangle DEF$ .



$$\text{Since } \triangle ABC : \triangle DEF = BC : EF (\text{Ex. 70}) = 6.3 : 4$$

( 19 )

$$\therefore \Delta DEF = \frac{EF \times \Delta ABC}{BC} = \frac{5.4 \times 12}{6.3} = \frac{12}{2} = 10 \text{ sq in}$$

## 2. See figure Ex. 1.

Let  $ABC, DEF$  be two triangles of equal altitude. Then if  $\Delta ABC, \Delta DEF = 24.17$ , and if  $BC = 4.2 \text{ cm}$ , it is required to find  $EF$ .

Since  $BC \cdot EF = \Delta ABC \cdot \Delta DEF$  (Th 70) = 24.17

$$\therefore EF = \frac{17 \cdot BC}{24} = \frac{17 \times 4.2}{24} = 2.9 = 3.0 \text{ cm nearly}$$

## 3. See figure Ex. 1.

Let  $ABC, DEF$  be two triangles lying between the same parallels.

Then if  $BC = 20.7 \text{ m.}$ ,  $EF = 16.2 \text{ m.}$ , and area of the  $\Delta DEF$  is 50.1201 sq m., it is required to find the area of  $\Delta ABC$ .

Since  $\Delta ABC : \Delta DEF = BC : EF$  [Th 70] = 20.7 : 16.2

$$\therefore \Delta ABC = \frac{20.7 \times \Delta DEF}{16.2} = \frac{20.7 \times 50.1201}{16.2} = 64 \text{ sq m.}$$

nearly.

4. Let  $ABCD, EFGH$  be two parms. whose areas are in the ratio 2.1.3.5, and which lie between the same parallels

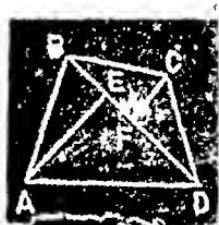


If  $BC = 6.6''$ , it is required to find  $FG$

$BC \cdot FG = \text{parlm. } AC : \text{parlm. } EG$  [Th 70] = 2.1.3.5

$$\therefore FG = \frac{3.5 \times BC}{2.1} = \frac{3.5 \times 6.6}{2.1} = 11''$$

5. Let  $ABD, CBD$  represent two triangular fields upon the same base  $BD$ , and on the opp sides of it. Draw  $AE, CF$  perp. to  $BD$ . Then if  $AE = 1.2$  chains,  $CF = 3.71$  chains and area of the field  $ABD = 18$  acres, it is required to



find the area of the whole quadl ABCD

$$\text{Since } \triangle ABD = \frac{1}{2} BD \cdot AE = \frac{1}{2} BD \times 4.2 = 21 BD,$$

$$\text{and } \triangle CBD = \frac{1}{2} BD \cdot CF = \frac{1}{2} BD \times 3.71 = 18.55 BD$$

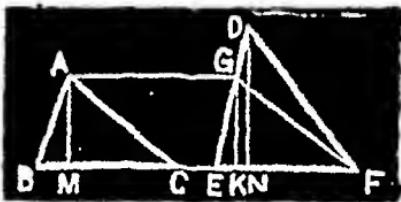
$$\therefore \triangle ABD + \triangle CBD = 21 BD + 18.55 BD = 60.55$$

$$\therefore \triangle CBD = \frac{53 \times \triangle ABD}{60} = \frac{53 \times 18}{60} = 15.9 \text{ acres}$$

$$\therefore \text{area of the quadl } ABCD = \triangle ABD + \triangle CBD \\ = 18 + 15.9, \text{ or } 33.9 \text{ acres}$$

### Exercises on page 289.

1. Let  $ABC, DEF$  be two triangles on equal bases  $BC, EF$ , of which the altitudes are  $AM$  and  $DN$  respectively. It is required to prove that  $\triangle ABC \triangle DEF = AM \cdot DN$ .



Place the two triangles such that their bases are in the same st line  $BCEF$ , and draw  $AG$  paral to  $EF$  meeting  $DE$  in  $G$ . Join  $FG$ , and draw  $GK$  perp to  $EF$ . Then

$$(1) \text{ Since } \triangle ABC = \frac{1}{2} AM \cdot BC, \text{ and } \triangle DEF = \frac{1}{2} DN \cdot EF$$

$$\therefore \triangle ABC \triangle DEF = \frac{1}{2} AM \cdot BC \cdot \frac{1}{2} DN \cdot EF = AM \cdot DN [ \quad BC = EF ]$$

(ii) Again since the  $\triangle s GEK, DEN$  are similar,

$$GE \cdot DE = GK \cdot DN = AM \cdot DN, [\ . \ GK = AM \text{ Th 21}]$$

and since the  $\triangle s GEF, DEF$  have a common vertex  $F$ , and hence the same altitude

$$\triangle GEF \triangle DEF = GE \cdot DE [\text{Th 70}]$$

$$= AM \cdot DN (\text{Proved})$$

$$\text{But } \triangle GEF = \triangle ABC [\text{Th 26}], \quad \triangle ABC \triangle DEF = AM \cdot DN$$

2. Let a st. line  $XY$  be drawn parl. to the base  $BC$  of the  $\triangle ABC$  cutting  $AB$  at  $X$ , and  $AC$  at  $Y$ . Join  $BY$ ,  $CX$ , then it is required to prove that  
 (i)  $AX \cdot XB = AY \cdot YC$ , and (ii)  $AB \cdot AX = AC \cdot AY$ .

(i) Since the  $\triangle s AXY, CXY$  have the common vertex  $X$ , and hence the same altitude,  $\therefore \triangle AXY : \triangle CXY = AY : CY$  [Th. 70]

Similarly  $\triangle AXY : \triangle BXY = AX : BX$  [Th. 70]

But  $\triangle BXY = \triangle CXY$  [Th. 26],  $\therefore AY : CY = AX : BX$

(ii) Since  $\triangle ABY : \triangle AXY = AB : AX$  [Th. 70],

and  $\triangle ACX : \triangle AXY = AC : AY$  "

also  $\triangle BXY : \triangle CXY = BX : CY$  [Th. 26], hence by adding  $\triangle AXY$  to each of these equals, we have  $\triangle ABY : \triangle ACX$

$\therefore AB \cdot AX = AC \cdot AY$ .

3. Let  $ABCD$  be a quadrilateral, and let its diagonals  $AC, BD$  intersect at  $O$ . It is required to prove that  $\angle s ABO, ADO, BCO, DCO$  are proportionals.

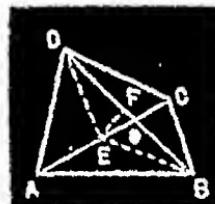
Since the  $\triangle s ABO, ADO$  have the same altitude,

$\therefore \triangle ABO : \triangle ADO = BO : OD$  [Th. 60]

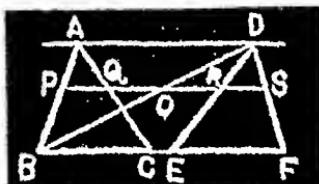
Similarly  $\triangle BCO : \triangle DCO = BO : OD$  "

$\therefore \triangle ABO : \triangle ADO = \triangle BCO : \triangle DCO$

$\therefore$  they are proportionals



4. Let  $ABC, DEF$  be two triangles on equal bases  $BC, EF$ , and between the same parallels  $AD, BF$ , also let  $PQRS$  be any line parl. to  $BF$  cutting



$AB, AC$  in the pts  $P, Q$  and  $DE, DF$  in the pts  $R, S$  respectively. It is required to prove that  $\triangle APQ = \triangle DRS$

Join  $BD$  intersecting  $PS$  in  $O$ . Then from the  $\triangle ABD$ , we have  $BP : AP = BO : OD$  [Th 60], and  $BP + AP : AP = BO + OD : OD$ , or  $AB : AP = BD : OD$ .

Similarly from the  $\triangle BDE$  it may be proved that

$$BD : OD = DE : DR, \therefore AB : AP = DE : DR$$

But  $AB : AP = BC : PQ$  ( $\because \triangle s ABC, APQ$  are similar) and  $DE : DR = EF : RS$  ( $\because \triangle s DEF, DRS$  are similar)

$$BC : PQ = EF : RS, \text{ or alternately } BC : EF = PQ : RS$$

$$\text{But } BC = EF \text{ [Hyp]}, \quad PQ = RS$$

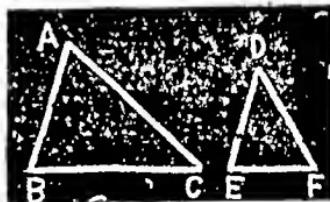
Again since  $\triangle s APQ, DRS$  are between the same parallels  $AD$  and  $PS$ , hence they have the same altitude

$$\triangle APQ : \triangle DRS = PQ : RS \text{ (Th 70)}$$

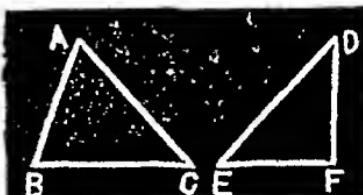
$$\text{But } PQ = RS \text{ (proved)}, \quad \triangle APQ = \triangle DRS$$

5. Let  $ABC, DEF$  be two triangles having  $\angle B = \angle E$ . If  $AB = 27"$ ,  $BC = 35"$ ,  $DE = 21"$ , and  $DF = 18"$ , then it is required to prove that  $\triangle ABC : \triangle DEF = 5 : 2$

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{AB : BC}{DE : EF} \text{ (Th 71)} = \frac{27 \times 35}{21 \times 18} = \frac{5}{2}$$



6. Let  $ABC, DEF$  be two triangles of equal area, having  $\angle B = \angle E$ . If  $AB = 56$  cm,  $BC = 63$  cm,  $DE = 72$  cm, it is required to find  $EF$



Since  $\triangle ABC, \triangle DEF = AB \cdot BC \cdot DE \cdot EF$  (Th 71)  
 and since  $\triangle ABC = \triangle DEF, \therefore AB \cdot BC = DE \cdot EF$

$$\therefore EF = \frac{AB \cdot BC}{DE} = \frac{5.6 \times 6.3}{7.2} = 4.9 \text{ cm}$$

7. Let  $ABCD, EFGH$  be two parallelograms having their areas in the ratio 3:4, and  $\angle B = \angle F$ . If  $AB = 4.8 \text{ cm.}, BC = 13.5 \text{ cm.}, EF = 10.8 \text{ cm.}$ , it is required to find  $FG$ .

Since  $AB \cdot BC \cdot FG \cdot FE = \text{parm } AC \cdot \text{parm } GE$  (Th 71) = 3:4

$$\therefore 3 \cdot FG \cdot FE = 4 \cdot AB \cdot BC, \text{ and } FG = \frac{4 \cdot AB \cdot BC}{3 \cdot FE} = \frac{4 \times 4.8 \times 13.5}{3 \times 10.8} \\ = 8 \text{ cm}$$

(ii) Draw  $AP, EQ$  perp to  $BC, GE$  and let them be denoted by  $p, p'$  respectively; then shall  $p \cdot p' = 4:9$

Since  $\text{parm. } AC = AP \cdot BC$ , and  $\text{parm. } GE = EQ \cdot FG$ .

$$\therefore \frac{AP \cdot BC}{EQ \cdot FG} = \frac{\text{parm. } AC}{\text{parm. } GE} = \frac{3}{4} \quad \therefore \frac{AP}{EQ} = \frac{3 \cdot FG}{4 \cdot BC} = \frac{3 \times 8}{4 \times 13.5} = \frac{4}{9}$$

8. Let  $ABC$  be a triangle, and let its altitude  $AD$  be denoted by  $p$ . Then  $AD = AC \cdot \sin C$ , or  $p = b \cdot \sin C$ .

$$\therefore \text{area of } \triangle ABC = \frac{1}{2} BC \cdot AD = \frac{1}{2} ap = \frac{1}{2} ab \cdot \sin C$$

(ii) If  $DEF$  be any other triangle having  $\angle E = \angle B$ , the area of  $\triangle DEF = \frac{1}{2} DE \cdot EF \cdot \sin E$

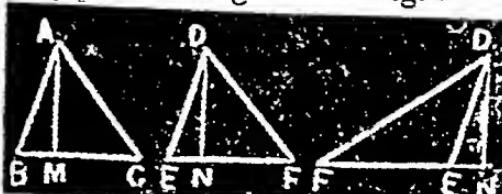
$$\therefore \frac{\triangle ABC}{\triangle DEF} = \frac{\frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin B}{\frac{1}{2} DE \cdot EF \cdot \sin E} = \frac{AB \cdot BC}{DE \cdot EF} \quad [\because \sin B = \sin E]$$

Fig. 1

Fig. 2

Fig. 3

9. Let  $ABC, DEF$  be two triangles equal in area, and having  $AB \cdot DE = EF \cdot BC$ . It is required to prove



that  $\angle B$  and  $E$  are either equal or supplementary

Draw  $AM, DN$  perp to  $BC$  and  $EF$  respectively, then the area of  $\triangle ABC = \frac{1}{2} AM BC$  and that of  $\triangle DEF = \frac{1}{2} DN EF$   
But  $\triangle ABC = \triangle DEF$ .  $AM \cdot BC = DN \cdot EF$

Again Since  $AB \cdot DE = EF \cdot BC$  [Hyp], .  $AB \cdot BC = DE \cdot EF$

$$\therefore \frac{AM \cdot BC}{AB \cdot BC} = \frac{DN \cdot EF}{DE \cdot EF} \text{ or } \frac{AM}{AB} = \frac{DN}{DE} \therefore \frac{AM}{DN} = \frac{AB}{DE}$$

In the rt angled  $\triangle s$   $AMB, DEN$ , since  $\angle AMB = \angle DNE$ , and the sides about  $\angle s$   $BAM, EDN$  are proportional (*proved*),

the  $\angle s B$  and  $E$  are either equal or supplementary [Th 65]

**Note**—This exercise can be easily proved by means of Ex 8 as given below, but it involves the use of Trigonometry, and is therefore avoided.

[Since  $\triangle ABC = \triangle DEF$ , .  $\frac{1}{2} AB \cdot BC \sin B = \frac{1}{2} DE \cdot EF \sin E$  (Ex 8) But  $AB \cdot BC = DE \cdot EF$  (Hyp), .  $\sin B = \sin E$   
 $B = E$  or  $= 180^\circ - E$ ]

**10.** Let  $ABC$  be a triangle, and let  $AB, AC$  be cut by any st line at  $P$  and  $Q$  respectively. It is required to prove that  $\triangle APQ \sim \triangle ABC = AP \cdot AQ : AB \cdot AC$

Join  $PC$ , then  $\frac{\triangle APQ}{\triangle APC} = \frac{AQ}{AC}$  [Th 70], and  $\frac{\triangle APC}{\triangle ABC} = \frac{AP}{AB}$  (Th 70)

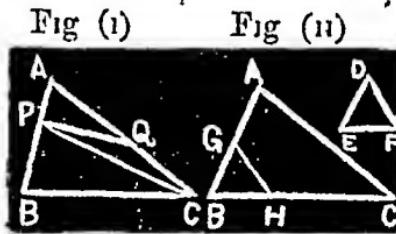
By multiplying these two ratios, we have

$$\triangle APQ \sim \triangle ABC = AP \cdot AQ : AB \cdot AC$$

(ii) Let  $ABC, DEF$  be two triangles having  $\angle B = \angle E$   
It is required to prove that  $\triangle ABC \sim \triangle DEF = AB \cdot BC : DE \cdot EF$

Apply the  $\triangle DEF$  to the  $\triangle ABC$  such that the pt  $E$  falls upon the pt  $B$ , and the side  $ED$  along the side  $AB$ ,

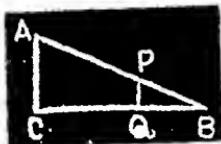
then the side  $EF$  will fall along the side  $BC$ , since  $\angle E = \angle B$ . Let  $BGH$  be the new position of the  $\triangle DEF$ .



Then  $\triangle ABC \sim \triangle BGH = AB \cdot BC \cdot BG \cdot GH$  [Proved in case (1)]  
 $\therefore \triangle ABC : \triangle DEF = AB \cdot BC \cdot DE \cdot EF.$

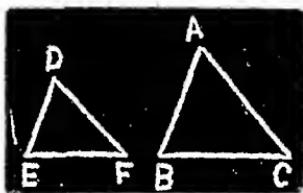
### Exercises on page 291.

1. Let  $ABC$  be a triangle, and let  $BQ$  be one third of  $BC$ . Draw  $PQ$  parallel to  $AC$ . It is required to find what part of the  $\triangle ABC$  is the  $\triangle BPQ$ .



Since the  $\triangle s AXY, BPQ$  are equiangular, and hence similar.  
 $\therefore \triangle BPQ \sim \triangle ABC = BQ^2 \cdot BC^2$  [Th. 72] =  $1:9$   
 $\therefore \triangle BPQ$  is one-ninth of the  $\triangle ABC$ .

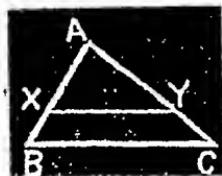
2. Let  $ABC, DEF$  be two similar triangles in which the corresponding sides  $BC, EF$  are 3 ft 6 inch, and 2 ft 4 in respectively. If the area of the  $\triangle ABC$  is 45 sq. ft., it is required to find the area of the  $\triangle DEF$ .



$$\triangle ABC \sim \triangle DEF = BC^2 \cdot EF^2 \quad [\text{Th. 72}] = (3\frac{1}{2})^2 \cdot (2\frac{1}{3})^2 = 9\frac{4}{9}$$

$$\therefore \triangle DEF = \frac{4}{9} \times \triangle ABC = \frac{4}{9} \times 45 = 20 \text{ sq. ft}$$

3. Let  $ABC$  be a triangle, and let  $AB$  be divided at  $X$  in the ratio 5:3. Draw  $XY$  parallel to  $BC$ , then if the area of the  $\triangle ABC$  = 25.6 sq. cm., it is required to find the area of the  $\triangle AXY$ .



$$\text{Since } BX : AX = 3 : 5, \therefore BX + AX : AX = 3 + 5 : 5, \text{ or } AB : AX = 8 : 5$$

$$\triangle ABC \sim \triangle AXY = AB^2 : AX^2 \quad [\text{Th. 72}] = 64 : 25$$

$$\therefore \triangle AXY = \frac{25}{64} \times \triangle ABC = \frac{25}{64} \times 25.6 = 10 \text{ sq. cm.}$$

## 4. See figure Ex 2

Let  $ABC, DEF$  be two similar triangles whose areas are 392 sq cm and 200 sq cm respectively. It is required to find the ratio of any pair of corresponding sides

$$\frac{AB^2}{DE^2} = \frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} \text{ [Th 72]} = \frac{392}{200} = 49 : 25$$

$$\therefore \frac{AB}{DE} = 7 : 5$$

Since the  $\triangle s ABC, DEF$  are similar, hence the ratio of any pair of corresponding sides is the same as  $AB : DE$ , or as 7:5

## 5. See figure Ex 2.

Let  $ABC, DEF$  be two similar triangles whose areas are 32 sq in, and 60.5 sq in respectively If  $DE=7.7$ , it is required to find  $AB$ .

$$\frac{AB^2}{DE^2} = \frac{\Delta ABC}{\Delta DEF} \text{ [Th 72]} = \frac{32}{60.5} = 16 : 30.25$$

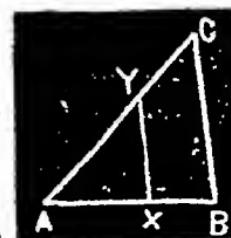
$$\therefore AB : DE = 4 : 5.5, \text{ and } .55 AB = .55 DE = 4 \times 7.7 = 30.8,$$

$$\therefore AB = 5.6$$

6. Let  $ABC$  be a triangle, and let  $XY$  be drawn parallel to  $BC$  such that  $\triangle AXY$  is nine-sixteenths of the  $\triangle ABC$ . It is required to find the ratio  $AX : AB$

$$\therefore \frac{AX^2}{AB^2} = \frac{\Delta AXY}{\Delta ABC} \text{ [Th 72]} = 9 : 16,$$

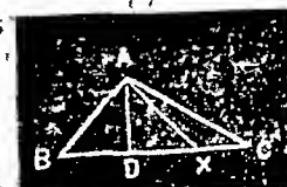
$$\therefore AX : AB = 3 : 4 \quad \text{Divide } AB \text{ at } X \text{ in the ratio } 3:4, \text{ and draw } XY \text{ parl. to } BC, \text{ then } \triangle AXY = \text{nine-sixteenths of the } \triangle ABC$$



7. Let  $ABC$  be a triangle right-angled at  $A$ , and let  $AD$  be drawn perp to  $BC$ . It is required to prove  $\triangle BAD \sim \triangle ACD = BA^2 : AC^2$

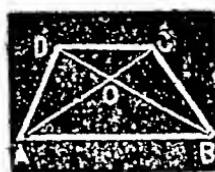
Since  $\triangle s BAD, ACD$  are similar, and  $BA, AC$  being their hypotenuses, are their corresponding sides (Th 66)

$$\therefore \triangle BAD \sim \triangle ACD = BA^2 : AC^2 \text{ (Th 72)}$$



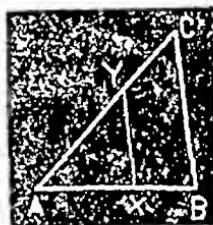
8. Let  $ABCD$  be a trapezium of which  $AB, CD$  are the parallel sides, such that  $AB=2CD$ . If the diagonals  $AC, BD$  intersect at  $O$ , it is required to find the ratio of the  $\triangle AOB$  to the  $\triangle COD$ .

Since  $\angle ABO = \text{alt. } \angle ODC$ , and  $\angle BAO = \angle OCD$   
the  $\triangle s AOB, COD$  are similar  
 $\therefore \frac{\triangle AOB}{\triangle COD} = \frac{AB^2}{CD^2} = 4 : 1$



9. Let  $ABC$  be a triangle, and let  $XY$  be drawn parallel to  $BC$  such that  $\triangle AXY$  s.t.  $XBCY = 4 : 5$ . It is required to prove that  $AX : BX = 2 : 1$ .

Since  $\frac{\text{Fig } XBCY}{\triangle AXY} = \frac{5}{4}$ , .  $\frac{\text{Fig } XBCY + \triangle AXY}{\triangle AXY}$   
 $= \frac{5+4}{4}$ , or  $\frac{\triangle ABC}{\triangle AXY} = \frac{9}{4}$



$\therefore AB^2 : AX^2 = \triangle ABC : \triangle AXY$  (Th 72)  $= 9 : 4$ ,  $AB : AX = 3 : 2$   
 $\therefore AB - AX : AX = 3 - 2 : 2$ , or  $BX : AX = 1 : 2$ ,  $AX : BX = 2 : 1$

10. Let  $ABC, A'B'C'$  be two similar triangles. If  $p, p'$  denote their corresponding altitudes,  $R, R'$  the radii of their circumcircles, and  $r, r'$  radii of their in-circles, then each of the ratios  $p:p', R:R', r:r'$  is equal to the ratio of any pair of corresponding sides (Ex 2, p 267)

Again since  $\triangle ABC : \triangle A'B'C' =$  the ratio of the squares of any pair of corresponding sides (Th 72)

$$\triangle ABC : \triangle A'B'C' = p^2 : p'^2 = R^2 : R'^2 = r^2 : r'^2$$

(u) Again let  $AE, A'E'$  be their corresponding medians, then  $\triangle ABE = \frac{1}{2} \triangle ABC$ , and  $\triangle A'B'E' = \frac{1}{2} \triangle A'B'C'$  (Th 70)



$$\therefore \triangle ABC \sim \triangle A'B'C' = \triangle ABE \sim \triangle A'B'E'$$

Since  $\triangle s ABC, A'B'C'$  are similar,  $AB:A'B' = BC:B'C' = BE:B'E'$

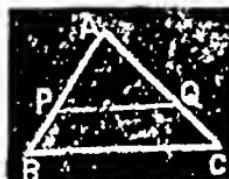
In the  $\triangle s ABE, A'B'E'$ ,  $\angle B = \angle B'$  and the sides about them are proportionals, hence they are similar (Th 64)

- $\triangle ABE \sim \triangle A'B'E' = AE^2 : A'E'^2$  (Th. 72)
- also  $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C' = AB^2 : A'B'^2$

### Exercises on page 294

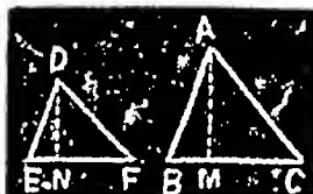
1. Let  $ABC$  be a triangle. It is required to draw  $PQ$  parallel to  $BC$  such that  $\triangle APQ = \text{four-ninths of } \triangle ABC$

Divide  $AB$  at  $P$  in the ratio 2 3, and draw  $PQ$  parallel to  $BC$



Then  $\triangle APQ \sim \triangle ABC = AP^2 : AB^2$  (Th. 72) = 4 : 9  
 $\therefore \triangle APQ = \text{four-ninths of } \triangle ABC$

2. Let  $DEF$  be a triangle such that  $DE = 2"$ ,  $EF = 3.2"$ , and  $FD = 2.5"$ . It is required to find the sides of a similar  $\triangle ABC$  which  $= 3 \triangle DEF$



$$AB^2 : DE^2 = \triangle ABC : \triangle DEF \text{ (Th. 72)} = 3 : 1$$

$$\therefore AB : DE = \sqrt{3} : 1$$

$$\therefore AB = \sqrt{3} \times DE = \sqrt{3} \times 2 = 3.46"$$

Similarly it may be shown that  $BC = \sqrt{3}EF = \sqrt{3} \times 3.2 = 5.54"$ , and that  $AC = \sqrt{3}FD = \sqrt{3} \times 2.5 = 4.33"$

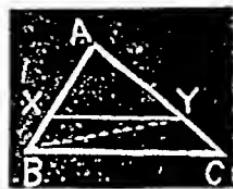
3. See figure Ex. 2

Let  $ABC, DEF$  be two similar triangles such that  $\triangle DEF : \triangle ABC = 18.69 : 16.81$ . Draw  $AM, DN$  perp to  $BC, EF$ , then if  $AM = 10$  ft. 3 in., it is required to find  $DN$

$$DN^2 : AM^2 = \triangle DEF : \triangle ABC \text{ [Ex-10, (i), p 291]} = 18.69 : 16.81$$

$$\therefore \frac{DN}{AM} = \frac{3.7}{4.1} \quad \therefore \quad DN = \frac{3.7 \times AM}{4.1} = \frac{3.7 \times 41}{4.1 \times 4} = \frac{37}{4} = 9 \text{ ft. } 8 \text{ in.}$$

4. Let  $ABC$  be a triangle whose area = 16 sq. cm ; and let  $XY$  drawn paral to  $BC$  divide  $AB$  in the ratio 3:5. Join  $BY$ , then it is required to find the area of the  $\triangle BXY$ .



Since  $AX BX = 3 : 5$ ,  $\therefore AB AX = 8 : 3$

$$\text{Now } \triangle ABC : \triangle AXY = AB^2 : AX^2 \text{ (Th 72)} = 64 : 9$$

$$\therefore \triangle AXY = \frac{9}{64} \times \triangle ABC = \frac{9}{64} \times 16 = \frac{9}{4} \text{ sq. cm.}$$

Again since  $\triangle AXY : \triangle BXY = AX : BX$  (Th 70) = 3 : 5

$$\therefore \triangle BXY = \frac{5}{3} \triangle AXY = \frac{5}{3} \times \frac{9}{4} = \frac{15}{4} = 3.75 \text{ sq. cm.}$$

#### 5. See Figure Ex 4

Let  $ABC$  be a triangle having  $BC = 10$  cm., and let  $XY$  drawn paral to  $BC$  cut the  $\triangle AXY$  = one-fifth of  $\triangle ABC$ . It is required to find  $XY$

$$XY^2 BC^2 = \triangle AXY : \triangle ABC \text{ (Th 72)} = 1 : 5$$

$$\therefore \frac{XY}{BC} = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \therefore XY = \frac{1}{\sqrt{5}} \times BC = \frac{1}{\sqrt{5}} \times 10 = 4.5 \text{ cm.}$$

6. Let  $ABCDE, A'B'C'D'E'$  be two regular pentagons on the sides of 2.5" and 3" respectively, and let  $AB, A'B'$  be their corresponding sides

If the area of  $ABCDE = 10\frac{3}{4}$  sq. in., it is required to find the area of  $A'B'C'D'E'$ .

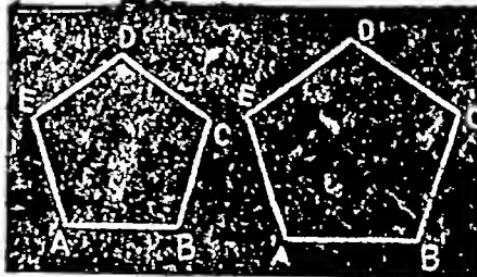
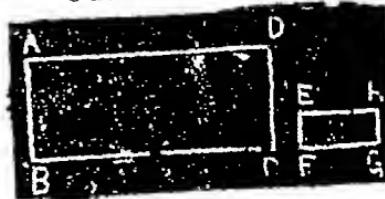


Fig  $ABCDE$  Fig  $A'B'C'D'E' = AB^2 A'B'^2$  (Th. 72) = 6 25 9  
 $\therefore A'B'C'D'E' = \frac{9}{625}$  the fig  $ABCDE = \frac{9}{625} \times \frac{48}{4} = 15\ 48$  sq in

7. Let  $ABCD$  represent a rectangular area whose length = 10 8 m, and whose length breadth = 12 5 Let  $EFGH$  be another



similar rectangle whose area = one-ninth of the rect  $ABCD$ . It is required to find the length and breadth of  $EFGH$

Since  $BC^2 : FG^2 = \text{rect } ABCD : \text{rect } EFGH$  (Th 72) = 9 1

$$BC : FG = 3 : 1, \quad FG = \frac{1}{3} BC = \frac{1}{3} \times 10.8 = 3.6 \text{ m}$$

Again since  $FG : EF = BC : AB = 12.5$

$$EF = \frac{5}{12} FG = \frac{5}{12} \times 3.6 = 1.5 \text{ m}$$

8. area of the plan Sq on the side of the plan  $= \frac{1 \times 1 \text{ sq in}}{\text{area of the field Sq on the side of the field}} = \frac{1 \times 1 \text{ sq in}}{66 \times 66 \text{ sq yds}}$

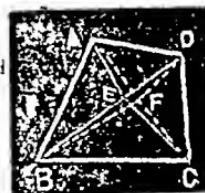
But the area of the plan = 100 sq in [Hyp]

, the area of the field =  $100 \times 66 \times 66$  sq. yds

$$= \frac{100 \times 66 \times 66}{4840} = 90 \text{ acres}$$

Since the plan is always drawn similar to the figure which it represents, hence the shape of the figure is immaterial

9. Let a quadl  $ABCD$  represent an estate drawn to the scale of 25" to the mile. Join  $AC$  and draw  $BE, DF$  perp to  $AC$ . Then if  $AC = 20"$ ,  $BE = 24"$ , and  $DF = 26"$ , it is required to find the acreage of the estate.



$$\begin{aligned} \text{Area of the quadl } ABCD &= \frac{1}{2} AC \times (BE + DF) \quad (\text{Th. 28}) \\ &= \frac{1}{2} \times 20 \times (24 + 26) = 500 \text{ sq in.} \end{aligned}$$

$$\frac{\text{area of the estate}}{\text{area of quadrl. } ABCD} = \frac{1 \times 1 \text{ sq. mi.}}{25 \times 25 \text{ sq. in.}} = \frac{1 \text{ sq. mi.}}{625 \text{ sq. in.}}$$

But the area of the quadrl.  $ABCD = 500 \text{ sq. in.}$

$$\therefore \text{area of the estate} = \frac{500}{625} \text{ sq. mi.} = \frac{500 \times 1760 \times 1760}{625 \times 4840}$$

$$= 512 \text{ acres.}$$

- 10** Let a triangle  $ABC$  having  $AB = 13 \text{ cm.}$ ,  $BC = 15 \text{ cm.}$ ,  $CA = 14 \text{ cm}$  represent a field whose area = 1.89 hectares  
*It is required to find the scale on which the plan is drawn*  
 Area of  $\triangle ABC = \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$   
 (Ex 7, p. 111)

$$= \frac{1}{4} \sqrt{42 \times 16 \times 14 \times 12} = 84 \text{ sq. cm}$$

and the area of the field = 1.89 hectares =  $1.89 \times 100 \times 100 \text{ sq. m.}$

$$\frac{\text{Sq. on a side of } \triangle ABC}{\text{Sq. on the corresp. side of the field}} = \frac{\text{area of } \triangle ABC}{\text{area of the field}}$$

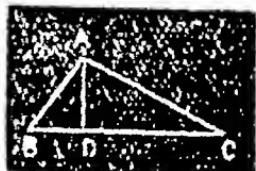
$$= \frac{84}{18900} = \frac{4 \text{ sq. cm.}}{900 \text{ sq. m.}}$$

$$\frac{\text{a side of } \triangle ABC}{\text{the corresp. side of the field}} = \sqrt{\frac{4}{900}} = \frac{2}{30} = \frac{1 \text{ cm.}}{15 \text{ m.}}$$

$\therefore$  The plan is drawn on the scale of 1 cm. to 15 m.

### Exercises on page 295.

1. Let  $ABC$  be a triangle right-angled at  $A$ , and let  $AD$  be drawn perp. to  $BC$ .  
*It is required to prove that (i)  $BC^2 : BA^2 = BC : BD$ , (ii)  $BC^2 : CA^2 = BC : CD$ , (iii)  $BC^2 = BA^2 + AO^2$ .*



(1) Since the  $\triangle s$   $ABC$ ,  $ABD$  have the same altitude hence  $\triangle ABC \sim \triangle ABD$  (Th 72),

and since  $\triangle s$   $ABC$ ,  $ABD$  are similar, and  $BC$ ,  $BA$  are their corresponding sides (Th 66)

$\therefore \triangle ABC \sim \triangle ABD = BC^2 BA^2$  (Th 72)

$$\therefore BC^2 BA^2 = BC BD$$

(ii) Similarly from the similar  $\triangle s ABC, ACD$  it may be shown that  $BC^2 CA^2 = BC CD$

(iii) From (i) and (ii) we have  $\frac{BA^2}{BC^2} = \frac{BD}{BC}$  and  $\frac{CA^2}{BC^2} = \frac{CD}{BC}$

$$\therefore \frac{BA^2}{BC^2} + \frac{CA^2}{BC^2} = \frac{BD}{BC} + \frac{CD}{BC}, \text{ or } \frac{BA^2 + CA^2}{BC^2} = \frac{BD + CD}{BC}$$

$$\text{But } BD + CD = BC, \therefore BA^2 + CA^2 = BC^2$$

2. Let a triangle  $ABC$  be bisected by a st  $XY$

parl to  $BC$ . It is required to find the ratio  $AX : AB$

Since  $AX^2 AB^2 = \triangle AXY : \triangle ABC$  [Th. 72] = 1:2,

$$\therefore AX : AB = 1 : \sqrt{2}$$

Hence a triangle can be bisected by a st line  $XY$  parl to  $BC$  if the pt  $X$  divides  $AB$  such that  $AX : AB = 1 : \sqrt{2}$

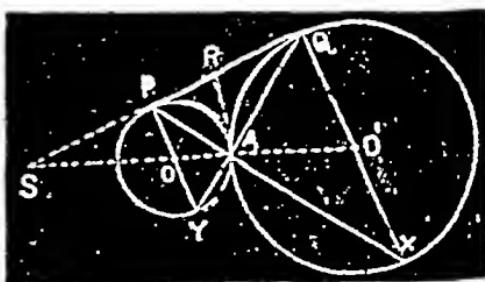


3. Let two circles whose

centres are  $O, O'$  have an

external contact at  $A$ , and

let a common tangent touching them at  $P, Q$  meet  $O'O$



produced in  $S$ . It is required to prove that  $\triangle SAP \sim \triangle SAQ = SP : SQ$ .

It is proved in Ex 7, p. 269 that  $\triangle s SAP, SAQ$  are similar, and  $SP : SA = SA : SQ$ ,  $\therefore SP : SQ = SP^2 : SA^2$  [Th 73, cor 1]

$$\therefore \triangle SAP, \triangle SAQ = SP^2 : SA^2$$
 [Th 72] =  $SP : SQ$

Note—It follows evidently from Th. 70 that  $\triangle SAP \sim \triangle SAQ = SP : SQ$ .

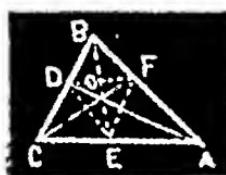
4. Let two circles intersect at  $A$  and  $B$ , and let the tangents at  $A$  meet the circumferences at  $P$  and  $Q$ . Join  $BP, BQ$ . It is required to prove that  $\triangle ABP \sim \triangle ABQ = BP : BQ$

It is proved in Ex. 8, p 269 that  $\triangle s ABP, ABQ$  are similar, and that  $BP : BA = BA : BQ \dots BP : BQ = BP : BA^2$  [Th. 73, cor. 1]

$$\therefore \triangle ABP, \triangle ABQ = BP^2 : BA^2 \text{ [Th 72]} = BP : BQ$$

**Note**—It also follows at once from Th 70 that  $\triangle ABP, \triangle ABQ = BP : BQ$

5. Let  $DEF$  be the pedal triangle of the  $ABC$ . It is required to prove that (i)  $\triangle ABC \sim \triangle DBF = AB^2 : BD^2$ , and (ii) fig.  $AFDC : \triangle DBF = AD^2 : BD^2$



Since the  $\angle s AFC, ADC$  are rt angles, hence the pts.  $A, F, D, C$ , are concyclic.

$\therefore$  the  $\angle s CAD, CFD$  standing on the same arc  $CD$  are equal  
 $\therefore$  their complements are also equal, viz  $\angle ACD = \angle BFD$

And the angle at  $B$  is common to the  $\triangle s DBF, ABC$ , hence their third angles are also equal, therefore they are similar

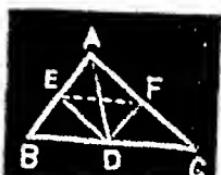
$$\therefore (i) \triangle ABC \sim \triangle DBF = AB^2 : BD^2 \text{ [Th 72]}$$

$$\text{and (ii)} \quad \triangle ABC - \triangle DBF, \triangle DBF = AB^2 : BD^2 = BD^2 : BD^2 \\ \text{or fig. } AFDC : \triangle DBF = AD^2 : BD^2$$

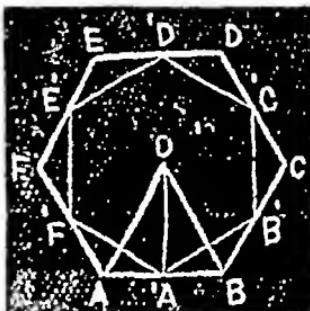
6. Let  $ABC$  be a triangle, and let  $\triangle DEF$  be inscribed in it by joining the middle points,  $D, E, F$  of the sides  $BC, AB$ , and  $AC$  respectively

Then since  $DE, EF, FD$  are parl to and half of  $CA, BC$  and  $AB$  respectively; hence  $\triangle s ABC, DEF$  are similar.

$\triangle DEF : \triangle ABC = DE^2 : CA^2 \text{ [Th 72]} = 1 : 4, \therefore DEF = \frac{1}{4} \triangle ABC$ . Similarly if a third triangle be inscribed in the  $\triangle DEF$ , and a fourth triangle in the third, it may be shown that the 3rd triangle =  $\frac{1}{4}$   $\triangle DEF$ , and the 4th triangle =  $\frac{1}{4}$  of the 3rd.



7. Let  $ABCDEF$  be a regular hexagon drawn on a side of  $a$  cm and let  $A'B'C'D'E'F'$  be a second hexagon inscribed in the first by joining  $A'B'C'D'E'F'$  the middle points of the sides  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $EF$  and  $FA$  respectively



Let  $O$  be the centre of the circle circumscribed about the hexagon  $ABCDEF$ , then it is also the centre of the circle circumscribed about the hexagon  $A'B'C'D'E'F'$  [Prob 31] Join  $OA$ ,  $OA'$ , then  $OA = AB$ , and  $OA' = A'B'$

$$\text{Now } OA'^2 = OA^2 - AA'^2 = a^2 - \frac{1}{4}a^2 = \frac{3}{4}a^2$$

$$\frac{\text{Hexagon } ABCDEF}{\text{Hexagon } A'B'C'D'E'F'} = \frac{OA^2}{OA'^2} = \frac{a^2}{\frac{3}{4}a^2} = \frac{4}{3}$$

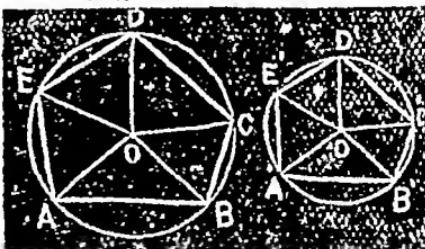
$\therefore$  Hexagon  $A'B'C'D'E'F' = \frac{4}{3}$  of the hexagon  $ABCDEF$   
Similarly if a third hexagon be inscribed in the second, a fourth in the third, and a fifth in the fourth hexagon it can be shown that the third hexagon  $= \frac{4}{3}$  of the second, the fourth hexagon  $= \frac{4}{3}$  of the third, and the fifth hexagon  $= \frac{4}{3}$  of the fourth

$$\therefore \text{the fifth hexagon} = \frac{4}{3} \text{ of the fourth} = \frac{9}{16} \text{ of the third}, \\ = \frac{27}{64} \text{ of the second} = \frac{81}{256} \text{ of the first}$$

the first hexagon the fifth hexagon  $= 256 : 81$

Fig (1) Fig (ii)

8. Let  $ABCDE$ ,  $A'B'C'D'E'$  be two similar cyclic figures, and let  $AB$ ,  $A'B'$  be their corresponding sides. Let  $O$ ,  $O'$  be the centres and  $D$ ,  $D'$  the diameters of the circle  $ABCDE$

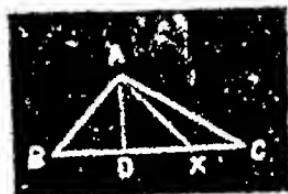


and  $A'B'C'D'E'$ . Then the figures  $ABCDE$   $A'B'C'D'E'$  can be divided into the same number of similar triangles by joining  $O$  to the vertices of the figures  $ABCDE$  and  $A'B'C'D'E'$  respectively.

$$\frac{\text{Fig } ABCDE}{\text{Fig } A'B'C'D'E'} = \frac{\triangle OAB}{\triangle O'A'B'} = \frac{OA^2}{O'A^2} = D^2$$

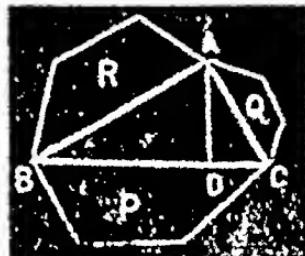
### Exercises on page 297.

1. Let  $ABC$  be a triangle right-angled at  $A$ , and let  $AD$  be perp from  $A$  on  $BC$ . It is required to prove that (i)  $BA^2 = BC \cdot BD$ , (ii)  $CA^2 = CB \cdot CD$ , and hence (iii)  $BC^2 = BA^2 + CA^2$



- (1) Because the  $\triangle$ s  $ABD$   $ABC$  are similar [Th. 66].  
 $BD \cdot BA = BA \cdot BC$ , and  $\therefore BA^2 = BC \cdot BD$   
(2) Again because the  $\triangle$ s  $ACD$   $ABC$  are similar  
 $. CD \cdot CA = CA \cdot CB$ , and  $\therefore CA^2 = CB \cdot CD$ .  
(3)  $BA^2 + CA^2 = BC \cdot BD + BC \cdot CD = BC(BD + CD) = BC^2$

2. Let  $ABC$  be a triangle right-angled at  $A$ , and let  $AD$  be perp to  $BC$ . On  $BC$   $CA$ , and  $AB$  are described  $P$ ,  $Q$  and  $R$  three similar and similarly described figures. Then if the fig  $P = \triangle ABC$ , it is required to prove that (i) the fig  $Q = \triangle ACD$ , and (ii) the fig  $R = \triangle ADB$ .



- (i) Since the  $\triangle$ s  $ABC$ ,  $ACD$  are similar [Th. 66]  
 $\therefore \triangle ABC \sim \triangle ACD = BC^2 : AC^2$  [Th. 72]

$\therefore$  the fig  $P$ , the fig  $Q$  [Th. 73]

But the fig  $P = \triangle ABC$  [Hyp],  $\therefore$  the fig  $Q = \triangle ACD$

(ii) Again because  $\triangle ABC, ABD$  are similar [Th 66]  
 $\therefore \triangle ABC \sim \triangle ABD = BC^2 : AB^2$  [Th 72]  
 $=$  the fig.  $P$  the fig.  $R$  [Th. 73]

But the fig.  $P = \triangle ABC$  [Hyp],  $\therefore$  the fig.  $R = \triangle ABD$

### 3. See figure Ex. 2

If  $AB = AC = 8.5$ , and if the fig.  $P = 89$  sq cm, it is required to find the areas of the figs.  $Q$  and  $R$

Since the fig.  $R$  the fig.  $Q = AB^2 : AC^2 = 64 : 25$

$\therefore$  (the fig.  $R +$  the fig.  $Q$ ) the fig.  $Q = (64+25) : 25$

$\therefore$  the fig.  $P$  the fig.  $Q = 89 : 25$  [Th 74]

$\therefore$  the fig.  $Q = \frac{25}{89} \times$  the fig.  $P = \frac{25}{89} \times 89 = 2.5$  sq cm.

the fig.  $R =$  the fig.  $P -$  the fig.  $Q = 89 - 2.5 = 64$  sq cm

4 Let  $ABC$  be a triangle, and let its medians  $BD, CE$  intersect at  $P$ . Join  $DE$ , then it is required to find the ratio of  $\triangle BPC$  to  $\triangle DPE$

Since  $DE$  is paral to, and half of  $BC$ , hence  
 $\angle PDE = \text{alt } \angle PBC$ , and  $\angle PED = \text{alt } \angle PCB$  [Th 14], also  $\angle DPE = \angle BPC$

$\triangle BPC, DPE$  are similar [Th 62]

$\triangle BPC \sim \triangle DPE = BC^2 : DE^2$  [Th 72] = 4 : 1



5 Let  $ABC$  be an isosceles triangle having the equal sides  $AB, AC$  each = 3.6". From a pt.  $D$  in  $AB$  let there be drawn a st line  $DE$  cutting  $AC$  produced at  $E$ , such that  $\triangle ADE = \triangle ABC$ . If  $AD = 1.8"$ , it is required to find  $AE$

Join  $DC, BE$ . Then because  $\triangle ABC = \triangle ADE$  [hyp]. By subtracting  $\triangle ADC$  from each of

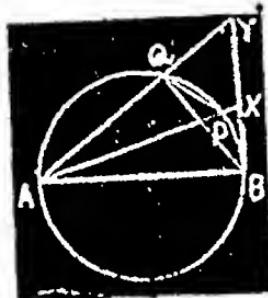


these equals, we have  $\triangle DBC = \triangle DEC$ , and since they stand on the same base  $DC$ , hence  $BE$  is para to  $DC$  [Th. 27]

$$\therefore AE \cdot AC = AB \cdot AD \text{ [Th. 60, Cor.], or } AE \cdot 36 = 36.18,$$

$$\therefore AE = \frac{36 \times 36}{18} = 72^\circ$$

6. Let  $AB$  be a diameter of a circle, and let any two chords  $AP, AQ$  produced meet the tangent at  $B$  in  $X$  and  $Y$ . Join  $PQ$ , then it is required to prove that (i)  $\triangle APQ, AYX$  are similar, and (ii) the pts  $P, Q, Y, X$  are concyclic.



Join  $BQ$ , then since the  $\angle ABY$  is a rt angle [Th 46], so also the  $\angle AQB$  is a rt angle [Th. 41], and the angle at  $A$  is common to the  $\triangle s ABY, AQB$ , hence their third angles  $AYB, ABQ$  are also equal

But  $\angle ABQ = \angle APQ$  [Th 39],  $\therefore \angle AYB$ , or  $\angle AYX = \angle APQ$ .

Similarly it may be proved that  $\angle AXB = \angle AQP$

And the angle at  $A$  is common,

(i)  $\therefore$  the  $\triangle s APQ, AYX$  are similar (Th 62).

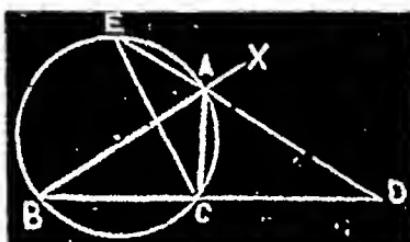
(ii) Since the  $\angle s APQ, XPQ$  together = 2 rt angles (Th 1)

$\therefore$  also the  $\angle s XYQ, XQP$  together = 2 rt angles

Similarly the  $\angle s PXY, PQY$  together = 2 rt angles

$\therefore$  the pts  $X, P, Q, Y$  are concyclic (Converse of Th. 41).

7. Let  $ABC$  be a triangle, and let the bisector of the external  $\angle A$  meet the base  $BC$  produced at  $D$ , and the circum-circle at  $E$ . It is required to prove that  $AB \cdot AC = AE \cdot AD$ .



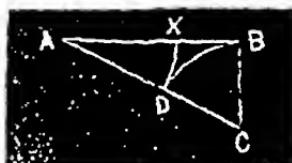
Join  $CE$ , then because  $\angle CAD = \angle XAD = \angle BAE$

By adding  $\angle BAC$  to each of these equals, we have  
 $\angle DAB = \angle CAE$

Also  $\angle ABC = \angle AEC$  (Th 39) Hence the third angles of the  $\triangle s ADB, ACE$  are also equal, and hence they are similar

$$\therefore AB : AE = AD : AC, \text{ and } AB : AC = AE : AD$$

8. A st line is said to be divided in extreme and mean ratio, when the whole line is to the greater segment as the greater segment is to the less



Take a st line  $AB = 10$  cm, and divide it in extreme and mean ratio at  $X$  (Prob. 23)

Measure  $AX, BX$ , and notice that  $AX = 6.2$  cm, and  $BX = 3.8$  cm

By Calculation since  $AB = 10$ , hence  $BC = 5$ , and  $DC = BC = 5$

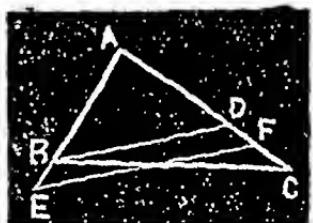
If  $AX = x$ , then  $AD = AX = x$ , and  $AC = AD + DC = x + 5$

Again since  $AC^2 = AB^2 + BC^2$ ,  $(x+5)^2 = 10^2 + 5^2 = 125$ .

$$\therefore x+5 = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}, \quad x = 5\sqrt{5} - 5 = 6.2 \text{ cm}$$

$$AX = 6.2 \text{ cm, and } BX = AB - AX = 10 - 6.2 = 3.8 \text{ cm}$$

9. It is required to draw an isosceles triangle equal to the given triangle  $ABC$  and having its vertical angle  $= \angle A$ .



**Const.**—From  $AC$  cut off  $AD = AB$ , and find  $AF$  the mean proportional between  $AC$  and  $AD$ , so that  $AF^2 = AD \cdot AC$  [Prob 38]

Join  $BD$ , and draw  $FE$  paral to  $BD$  meeting  $AB$  produced at  $E$  Then  $AEF$  is the required triangle

**Proof.**—Since  $EF$  is parl to  $BD$ , therefore  $\triangle AEF$  is equiangular to  $ABD$ , and hence  $\triangle AEF$  is isosceles so that  $AE=AF$

Again since  $\frac{\triangle ABD}{\triangle AEF} = \frac{AD^3}{AF^2}$  (Th 72)  $= \frac{AD^3}{AD \cdot AC} = \frac{AD}{AC}$

also  $\triangle ABD \sim \triangle ABC = AD \cdot AC$  (Th 70)

∴  $\triangle AEF = \triangle ABC$ , and hence  $AEF$  is the required isosceles triangle.

**10.** It is required to construct an isosceles triangle on a given base and equal in area to the given triangle  $ABC$ .

**Const.**—From  $BC$  cut off  $BP$  equal to the given base, and find  $BD$  the third proportional to  $BC$  and  $BP$ , so that  $BP^3 = BC \cdot BD$  (Prob. 36).

Bisect  $BD$  at  $E$ ; and draw  $EF$  perp to  $BD$  meeting the st line drawn from  $A$  parl to  $BC$  at  $F$ . Join  $BF, FD$ ; then  $BF=FD$  and hence  $BFD$  is an isosceles triangle

From  $P$  draw a st line parl. to  $DF$  meeting  $BF$  produced at  $Q$ , then  $BPQ$  is the required triangle

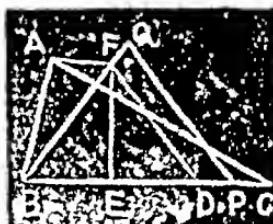
**Proof.**—Since  $PQ$  is parl to  $DF$ , therefore  $\triangle BPQ$  is eqn-angularto  $\triangle BDF$ ; and hence  $\triangle BPQ$  is isosceles so that  $BP=PQ$

Again since  $\frac{\triangle BDF}{\triangle BPQ} = \frac{BD^3}{BP^2}$  (Th 72)  $= \frac{BD^3}{BC \cdot BD} = \frac{BD}{BC}$

Also  $\triangle BDF \sim \triangle ABC = BD \cdot BC$  (Th 70)

∴  $\triangle BPQ = \triangle ABC$ , and hence  $BPQ$  is the required isosceles triangle

**Note.**—This exercise can be easily solved as Ex. 5, p 130; but we have preferred the above method because it involves the use of proportion.



## Exercises on page 299

1. Let  $ABC$  be a given triangle. It is required to divide it into two equal parts by a line  $XY$  drawn parl. to  $BC$ .

**Const.**—Bisect  $AB$  in  $D$ , and find  $AX$  mean proportional between  $AD$  and  $AB$ , so that  $AX^2 = AD \cdot AB$  (Prob. 38, Note), and draw  $XY$  parl. to  $BC$ . Then  $XY$  is the required line.

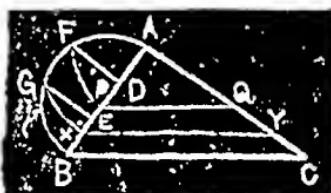
$$\text{Proof} - \frac{\triangle AXY}{\triangle ABC} = \frac{AX^2}{AB^2} \text{ (Th. 72)} = \frac{AB \cdot AD}{AB^2} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{2}$$

$\therefore \triangle AXY = \frac{1}{2} \triangle ABC$ ,  $\therefore XY$  is the required line.

(ii) Since  $AX^2 : AB^2 = 1 : 2$  [Proved],  $\therefore AX : AB = 1 : \sqrt{2}$

**Note.** For another solution see Ex 2, page 295.

2. Let  $ABC$  be a given triangle. It is required to divide it into three equal parts by lines  $PQ, XY$  drawn parl. to  $BC$ .



**Const.**—Divide  $AB$  into three equal parts at  $D$  and  $E$ . Find  $AP, AX$  mean proportional between  $AB, AD$ , and  $AB, AE$  respectively, so that  $AP^2 = AB \cdot AD$ , and  $AX^2 = AB \cdot AE$  (Prob. 38, Note); and draw  $PQ, XY$  parl. to  $BC$ . Then  $PQ, XY$  are the required lines.

$$\text{Proof} - \frac{\triangle APQ}{\triangle ABC} = \frac{AP^2}{AB^2} \text{ (Th. 72)} = \frac{AB \cdot AD}{AB^2} = \frac{AD}{AB} = \frac{1}{3}$$

$$\text{and } \frac{\triangle AXY}{\triangle ABC} = \frac{AX^2}{AB^2} \text{ (Th. 72)} = \frac{AB \cdot AE}{AB^2} = \frac{AE}{AB} = \frac{2}{3}$$

$$\triangle APQ = \frac{1}{3} \triangle ABC, \text{ and } \triangle AXY = \frac{2}{3} \triangle ABC$$

$\therefore \triangle ABC$  is divided into three equal parts by  $PQ$  &  $XY$ .

( n ) Since  $\frac{AP^3}{AB^3} = \frac{1}{2}$ , and  $\frac{AX^3}{AB^3} = \frac{2}{3}$  (Proved above)

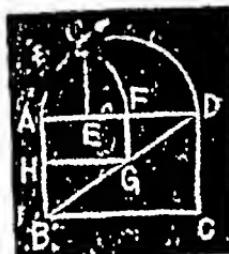
$$\therefore \frac{AP^3}{1} = \frac{AX^3}{2} = \frac{AB^3}{3}, \text{ and } \frac{AP}{1} = \frac{AX}{\sqrt{2}} = \frac{AB}{\sqrt{3}}$$

(iii) If a triangle is to be divided into  $n$  equal parts by lines drawn paral to one side  $BC$ , we must divide one of the other two sides  $AB$  at the pts  $P, Q, R, S, \dots$  such that

$$\frac{AP}{1} = \frac{AQ}{\sqrt{2}} = \frac{AR}{\sqrt{3}} = \frac{AS}{\sqrt{4}} = \dots = \frac{AB}{\sqrt{n}},$$

and from  $P, Q, R, S, \dots$  draw lines paral to  $BC$

3. Draw  $AB, AD$  any two st lines at right angles to each other, making  $AB=5$  cm., and  $AD=8$  cm and complete the rect.  $ABCD$   
It is required to draw a similar rectangle of one-third area

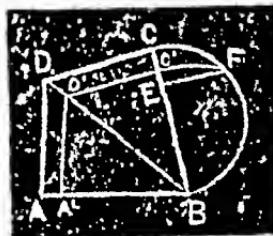


**Const.** Trisect  $AD$  in  $E$ , and find  $AF$  mean proportional between  $AD$  and  $AE$ , so that  $AF^2 = AD \cdot AE$ .  
(Prob 38, Note) On  $AF$  draw the rect  $AFGH$  similar to  $ADCB$ . Then  $AFGH$  is the required rectangle.

**Proof.**  $\frac{\text{rect } AFGH}{\text{rect } ABCD} = \frac{AF^2}{AD^2}$  (Th. 73)  $= \frac{AD \cdot AE}{AD^2} = \frac{AE}{AD} = \frac{1}{3}$   
the rect.  $AFGH = \frac{1}{3}$  of the rect.  $ABCD$

$$(ii) \because \frac{AF^2}{AD^2} = \frac{1}{3}, \therefore \frac{AF}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \therefore AF = \frac{1}{\sqrt{3}} AD = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 8 = 4.6 \text{ cm}$$

4. Draw any two st lines  $AB, AD$  at rt angles to each other such that  $AB = 8$  cm., and  $AD = 6$  cm. Join  $BD$ , and with centres  $B$  and  $D$  and radii 8 cm., and 6 cm. draw two arcs cutting in  $C$ . Join  $BC, DC$ , then  $ABCD$  is the required quadrilateral



*It is required to draw a similar quadrilateral to contain an area of 36 sq cm*

**Const.** Make  $BE = \text{three-fourths}$  of  $BC$ , and find  $BC'$  mean proportional between  $BE, BC$  so that  $BC'^2 = BE \cdot BC$  (Prob 38, Note) On  $BC$  draw the quadl  $BC'D'A'$  similar to the quadl  $BCDA$  (Prob. 39) Then  $BC'D'A'$  is the required quadrilateral

**Proof.**  $\frac{\text{fig } BC'D'A'}{\text{fig } BCDA} = \frac{BC'^2}{BC^2}$  (Th 73)  $= \frac{BE \cdot BC}{BC^2} = \frac{BE}{BC} = \frac{3}{4}$

the quadl  $BC'D'A' = \text{three-fourths}$  of the quadl  $BCDA$   
Since the quadl  $BCDA = \triangle ABD + \triangle BCD$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} AB \cdot AD + \frac{1}{2} BC \cdot CD \\ &= \frac{1}{2} \times 8 \times 6 + \frac{1}{2} \times 8 \times 6 = 48 \text{ sq cm} \end{aligned}$$

the area of the quadl  $BC'D'A' = \frac{3}{4} \times 48 = 36 \text{ sq cm}$

..  $BC'D'A'$  is the required quadrilateral

5. Let  $ABC$  be a given circle of radii  $us=3$ . It is required to divide it into three equal parts by means of two concentric circles

**Const** Draw any radius  $OA$ , and divide it into three equal parts at  $B$  &  $C$ . Find  $OX, OP$  mean proportionals between  $OA, OB$ , and  $OA, OC$  respectively, so that  $OX = OA \cdot OB$ , and  $OP^2 = OA \cdot OC$  (Prob 38, Note)



With centre  $O$ , and radius  $OX, OP$  draw two circles  $XYZ$  and  $PQR$  respectively. Then these are the required concentric circles

**Proof.** Since the area of a circle  $= \pi r^2$  [Page 203]

$$\frac{\text{circle } PQR}{\text{circle } ABC} = \frac{\pi OP^2}{\pi OA^2} = \frac{OP^2}{OA^2} = \frac{OA \cdot OC}{OA^2} = \frac{OC}{OA} = \frac{1}{3}$$

( 73 ) *haz*

$$\text{and } \frac{\text{circle } XYZ}{\text{circle } AB'C'} = \frac{\pi \cdot OX^2}{\pi \cdot OA^2} = \frac{OX^2}{OA^2} = \frac{OA \cdot OB}{OA^2} = \frac{OB}{OA} = \frac{2}{3}$$

∴ Circle  $PQR = \frac{1}{3}$  circle  $AB'C'$ , and circle  $XYZ = \frac{2}{3}$  circle  $AB'C'$

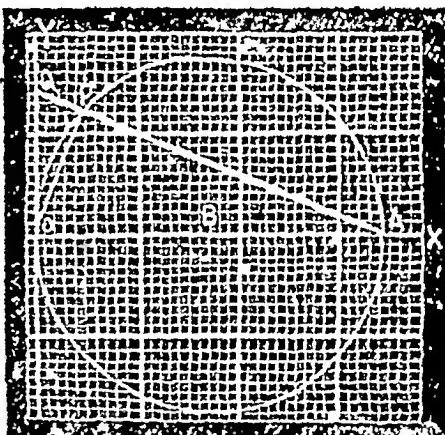
The circle  $AB'C'$  is divided into three equal parts by circles  $PQR$  and  $XYZ$ .

6 See the solution given in your text book,

### Exercises on page 301.

1 Plot the pt  $B$  whose co-ordinates are  $(1.7, 0)$ . With centre  $B$  and radius  $OB$  draw a circle, then it will touch  $OY$  at  $O$ .

From  $A$  draw any line  $AQ$  cutting the circle at  $P$ , and  $OY$  at  $Q$ . It is required to show that  $AP \cdot AQ$  is constant.



Join  $OP$ , then since  $OA$  is a diameter hence  $OPA$  is a rt. angle (Th 41) Also the  $\angle AOP$  is a rt angle

$$\therefore AP \cdot AQ = OA^2 \quad (\text{Th 66, Cor})$$

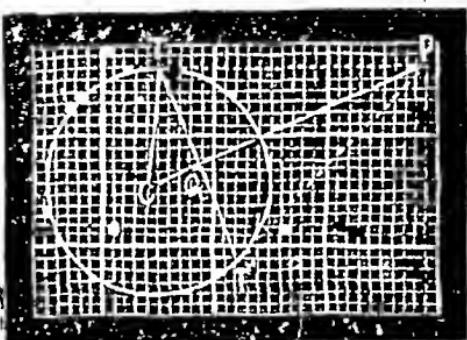
∴  $AP \cdot AQ$  is constant.

(ii) If 1' is taken as unit of length, then  $OA = 2OB = 3.4'$

$$\therefore AP \cdot AQ = OA^2 = (3.4)^2 = 11.56 \text{ sq. m.}$$

2. Plot the pts  $C$  and  $P$  whose coordinates are  $(5,6)$  and  $(29,16)$  respectively

With centre  $C$  and radius 10 draw a circle, and from  $P$  draw  $PT, PT'$  tangents to this circle



Join  $PC$  and  $TT'$ , and let  $PC$  meet  $TT'$  at  $Q$ . It is required to find (i)  $CP \cdot CQ$ , (ii)  $PQ \cdot CP$ , and (iii) the length of  $TT'$

Join  $CT$ , then  $CTP$  is a rt angle (Th 46).

Since  $PT=PT'$  and  $CT$  bisects the  $\angle TPT'$  (Th 47, Cor), therefore  $PQ$  is perp to  $TT'$

(i) In the rt angled  $\triangle PTC$ ,  $TQ$  is perp from the rt. angle to the hypotenuse

$$CP \cdot CQ = CT^2 \quad (\text{Th. 66, Cor}) = 10^2 = 100$$

(ii) Since  $CP = \sqrt{(29-5)^2 + (16-6)^2} = \sqrt{576 + 100} = 26$ , hence  $PT^2 = CP^2 - CT^2 = 26^2 - 10^2 = 576$

$$\therefore PQ \cdot CP = PT^2 \quad [\text{Th. 66, Cor}] = 576$$

$$(\text{iii}) \text{ From (ii) we have } PQ = \frac{PT^2}{CP} = \frac{576}{26} = \frac{576}{26},$$

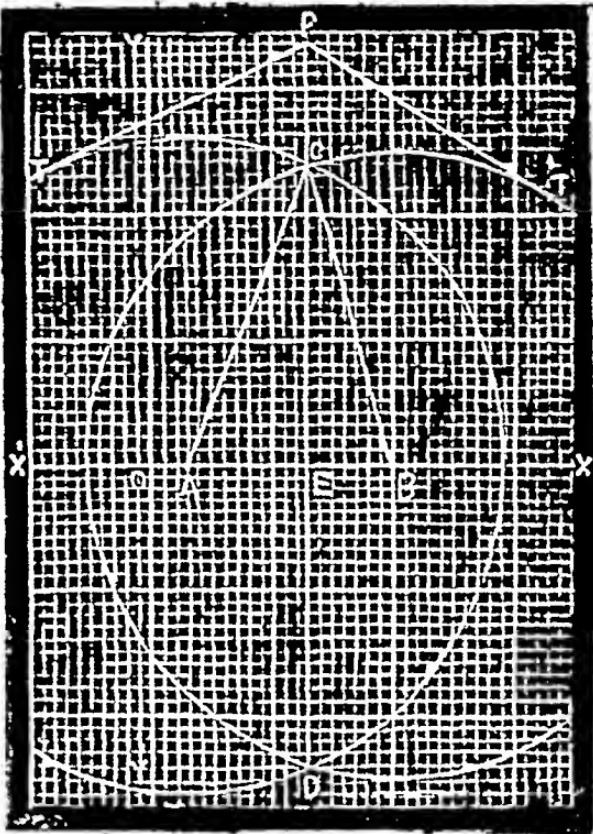
$$\therefore CQ = CP - PQ = 26 - \frac{576}{26} = \frac{100}{26}$$

$$\therefore QT^2 = CQ \cdot PQ \quad [\text{Th. 66, Cor}] = \frac{576}{26} \times \frac{100}{26}$$

$$\therefore QT = \frac{24 \times 10}{26} = \frac{120}{13}, \quad TT' = 2 QT = \frac{240}{13} = 18.47 \text{ nearly.}$$

3. Plot the pts  $A, B$  and  $P$  whose coo  
rdinates are  $(-3, 0)$ ,  
 $(2, 0)$  and  $(13, 3\frac{1}{4})$   
respectively.

With centres  $A \& B$   
and radii 2 6 and  
2 5 units draw two  
circles intersecting at  $C$  &  $D$ , and from  
 $P$  draw  $PT, PT'$  tangents to these circles  
respectively. It is  
required to find (i)  
the coordinates of  
 $C$  and  $D$ , (ii) the  
length of  $CD$  and (iii) the lengths of  $PT$  and  $PT'$



(1) Since  $AB$  bisects  $CD$  perpendicularly [Prop III,p 143]  
 $. AC^2 - AE^2 = CE^2 = BC^2 - BE^2$

Let  $AE=x$ , then  $BE=AB-AE=(17-x)$ , also  $AC=26$ , and  
 $BC=25$ ;

$$\cdot (26)^2 - x^2 = (25)^2 - (17-x)^2, \text{ or } 676 - x^2 = 625 - 289 + 34x - x^2 \\ \cdot 34x = 34, \text{ whence } x = 1$$

$$CE = \sqrt{AC^2 - AE^2} = \sqrt{(26)^2 - (1)^2} = \sqrt{676 - 1} = 24 \\ CD = 2CE = 48$$

(ii) Since  $OE = OA + AE = 3 + 1 = 13$

the coordinates of  $C$  are  $(13, 2\frac{1}{4})$ , and the coordinates  
of  $D$  are  $(13, -2\frac{1}{4})$ .

(iii) Since the *obscissa* of  $P$  is 13, therefore  $P$  lies on the st  $DC$  produced.

$$\therefore PC = PE - CE = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 4 = 1, \text{ and } PD = PE + ED = 3 \cdot 4 + 2 \cdot 4 = 5 \cdot 8$$

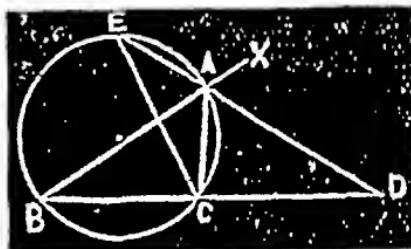
$$\therefore PT^2 = PD \cdot PC = [Th 75, Cor.] 5 \cdot 8 \times 1, \quad PT = 2 \cdot 4 \text{ nearly}$$

$$\text{Also } PT^2 = PD \cdot PC = 5 \cdot 8 \times 1, \quad PT = 2 \cdot 4 \text{ nearly,}$$

, the two tangents are equal and each = 2.4 nearly

### Exercises on page 302.

Let  $ABC$  be a triangle, and let the vertical angle  $A$  be externally bisected by a line which meets  $BC$  at  $D$ , and the circumcircle at  $E$ . It is required to prove that  $AB \cdot AC = BD \cdot DC - AD^2$



Since  $\angle BAE = \angle XAD = \angle CAD$ , therefore by adding  $\angle BAC$  to each of these equals we have  $\angle EAC = \angle BAD$

Join  $EC$ , then in the  $\triangle s EAC, BAD$ , because  $\angle EAC = \angle BAD$  (proved),  $\angle AEC = \angle ABC$  in the same segment [Th 39]

, the rem  $\angle ACE =$  the rem  $\angle ADB$

$\therefore$  the  $\triangle s EAC, BAD$  are equiangular,  $\therefore AE : AB = AC : AD$

$$\therefore AB \cdot AC = AE \cdot AD$$

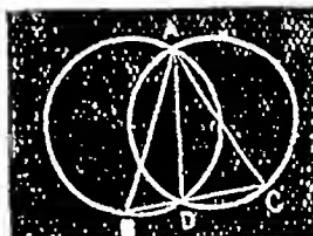
$$= (DE - AD) \cdot AD$$

$$= DE \cdot AD - AD^2$$

$$= BD \cdot DC - AD^2 \quad [\text{Th 75}]$$

### Exercises on Page 305.

1. Let  $ABC$  be an isosceles triangle, and let  $D$  be any pt in the base. It is required to prove that the circumscribed circles of the  $\triangle s ABD, ACD$  are equal



Since the  $\angle ABD = \text{the } \angle ACD$ , and  
these are the angles which the chord  $AD$  subtends at the  
circumferences of the circum-circles of the  $\triangle s ABD, ACD$   
respectively.

$\therefore$  These circles are equal.

2. Let  $ABC$  be an isosceles triangle,  
and let  $BD, CD$  be drawn perp. to  $AB$ ,  
 $AC$  respectively. It is required to  
prove that  $BC \cdot AD = 2 AB \cdot DB$

Because  $ABD, ACD$  are right angles,  
therefore the pts  $A, B, D, C$  are con-  
cyclic, and hence  $ABDC$  is a cyclic quadl.



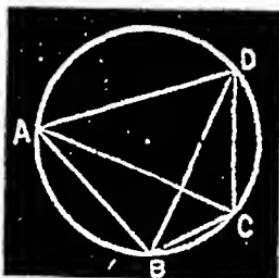
$$\therefore BC \cdot AD = AB \cdot DC + AC \cdot DB \quad (\text{Th 78})$$

$$= AB \cdot DB + AB \cdot DB \quad [\because DC = DC, \& AC = AB] \\ = 2 AB \cdot DB.$$

3. Let  $ABCD$  be a cyclic quadrila-  
teral having its diagonals  $AC, BD$  at  
right angles to each other. It is re-  
quired to prove that  $AB \cdot CD + AD \cdot BC$   
 $= 2$  the area of  $ABCD$

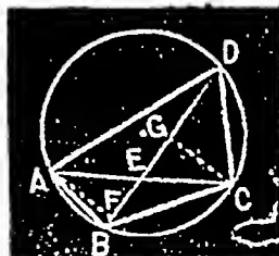
$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD \quad [\text{Th 78}]$$

$$= 2 \text{ the area of } ABCD \quad [\text{Ex. 8, p. 113}]$$



4. Let  $ABCD$  be a cyclic quadrilateral  
such that the diagonal  $BD$  bisects  $AC$  at  
 $E$ . It is required to prove that  $AD \cdot AB$   
 $= DC \cdot CB$ .

Draw  $AF, CG$  perp. to  $BD$ . Then in  
the rt. angled  $\triangle s AEF, CEG$  because



$\angle AEF = \angle CEG$  and the hypotenuse  $AE = CE$  [Hyp]

• the  $\triangle$ s are congruent [Th 17], and  $AF = CG$ .

If  $d$  denotes the diameter of the circle, then  $AD AB = d AF$ ,  
and  $DC CB = d CG$  [Th 77]

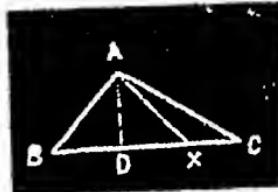
But  $AF = CG$  [Proved],  $AD AB = DC CB$

5. Let  $ABC$  be a triangle, and let  $A$  be joined to any pt  $X$  in  $BC$ . If  $r, r'$  denote the circum-radius of the  $\triangle$ s  $ABX, ACX$  respectively, it is required to prove that  $r r' = AB AC$

Draw  $AD$  perp to  $AC$ . If  $d, d'$  denote the circum-diameters of the  $\triangle$ s  $ABX, ACX$ , then

$AB AX = d AD$ , and  $AC AX = d' AD$  (Th 77)

• By division we have  $AB AC = D D' = r r'$



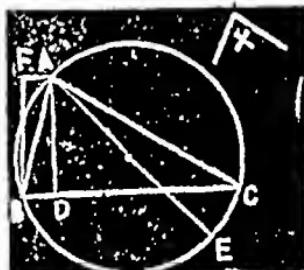
6. It is required to construct a triangle having given the base, the vertical angle, and the rectangle contained by the sides.

Let  $BC$  be the given base, and  $X$  the given angle. Upon  $BC$  describe a segment containing an angle  $= \angle X$  [Prob 24]. Then the diameter of this segment, which is the circum-diameter of the required triangle, is known

Again since the product of the sides = the circum-diameter  $\times$  the altitude [Th 77]

the altitude =  $\frac{\text{Product of the sides}}{\text{circum-diameter}}$ , is also known

From  $B$  draw  $BF$  perp to  $BC$ , making  $BF$  equal to the altitude above found. From  $F$  draw  $FA$  paral to  $BC$  cutting the circle at  $A$ .



Join  $AB, AC$ , then  $ABC$  is the required triangle.

7. Let  $ABC, DEF$  be two triangles of equal area inscribed in a circle. It is required to prove that the rectangle contained by any two sides of one triangle is to the rectangle contained by any two sides of other as the base of the second is to the base of the first.

Draw  $AM, DN$  perp to  $BC$  and  $EF$ ; and let  $d$  denote the diameter of the circle.

$$\text{Since } \triangle ABC = \frac{1}{2} AM \cdot BC, \text{ and } \triangle DEF = \frac{1}{2} DN \cdot EF$$

$$\therefore AM \cdot BC = DN \cdot EF, \text{ and } \therefore AM \cdot DN = EF \cdot BC$$

Again since  $AB \cdot AC = d \cdot AM$ , and  $DE \cdot DF = d \cdot DN$  [Th. 77]

$$\therefore \frac{AB \cdot AC}{DE \cdot DF} = \frac{d \cdot AM}{d \cdot DN} = \frac{AM}{DN} = \frac{EF}{BC} \quad [\text{Proved}]$$

Similarly it may be proved that  $\frac{AB \cdot BC}{DE \cdot EF} = \frac{DF}{AC}$ , and  $\frac{BC \cdot AC}{EF \cdot DF} = \frac{DE}{AB}$

8. Let  $P$  be any pt on the arc  $BC$  of the circum-circle of an equilateral triangle  $ABC$ . Join  $AP, BP$ , and  $CP$ . It is required to prove that  $PB + PC = PA$

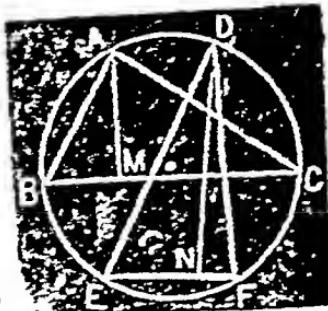
Since  $ABPC$  is a cyclic quadrilateral

$$\therefore AB \cdot PC + AC \cdot PB = BC \cdot PA \quad [\text{Th. 78}]$$

$$\text{or } AB \cdot PC + AB \cdot PB = AB \cdot PA \quad [\because AB = AC = BC]$$

$$\therefore AB \cdot (PC + PB) = AB \cdot PA$$

$$\therefore PC + PB = PA$$



9. Let  $ABCD$  be a cyclic quadrilateral such that  $BD$  bisects the  $\angle ABC$ . If  $A, C$  are fixed points, and  $B$  variable in position, it is required to prove that  $AB + BC : BD$  is a constant ratio.

Since  $\angle ABD = \angle CBD$ , the arc  $AD =$  the arc  $CD$ , and hence  $D$  being the middle pt. of the arc  $AC$  is a fixed point.

$$\text{Now } AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD \quad [\text{Th 78}]$$

$$\text{or } AB \cdot AD + BC \cdot AD = AC \cdot BD \quad [AD = CD]$$

$$\therefore AD(AB + BC) = AC \cdot BD$$

$$\therefore AB + BC : BD = AC : AD$$

But  $A, C$  being fixed points,  $AC$  and  $AD$  have constant lengths, and hence the ratio  $AC : AD$  is a constant ratio.

$\therefore AB + BC : BD$  is also a constant ratio.

10 (1) Area of the triangle whose sides are 21', 20' and 13'

$$= \frac{1}{4} \sqrt{(21+20+13)(-21+20+13)(21-20+13)(21+20-13)} \quad [\text{Ex 7, p 111}]$$

$$= \sqrt{54 \times 12 \times 14 \times 48} = 126 \text{ sq. in.}$$

$$\therefore R = \frac{ABC}{4\Delta} (\text{Th 77, Cor}) = \frac{21 \times 20 \times 13}{4 \times 126} = \frac{65}{6} = 10\frac{5}{6}$$

(2) Area of the triangle whose sides are 30', 25', and 11'

$$= \frac{1}{4} \sqrt{(30+25+11)(-30+25+11)(30-25+11)(30+25-11)} \quad [\text{Ex 7, p. 111}]$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{66 \times 6 \times 16 \times 44} = 132 \text{ sq. ft.}$$

$$\therefore R = \frac{ABC}{4\Delta} (\text{Th 77, Cor}) = \frac{30 \times 25 \times 11}{4 \times 132} = \frac{115}{8} = 15\frac{5}{8} \text{ ft.}$$

Verify the above results by drawing the figures to some convenient scale.





# **AN IMPORTANT NOTICE.**

---

We have prepared charts containing only *eleven* formulæ which will enable the students to find the areas, the in-radius and the circum-radius of all the important regular figures. These charts are offered at a very low price of *one anna* each.

To be had of-

Pt. Kanhaiya Lal Sharma B.A.

**PLEADER,**

**MANAK CHOWK,**

**ALIGARH,**

**CITY.**



प्रथम बार २०००

१९३०

मू० १।, सजिल्ड १।।

मुद्रक

जीतमल तूणिया  
सत्ता-साहित्य-इ-स  
बजार

## कामना

हिन्दी में वैज्ञानिक साहित्य अभी बहुत समृद्ध नहीं है। विकासवाद का ज्ञान हिन्दी-भाषियों में प्रायः सीमित ही है। ऐसी दशा में मराठी-भाषा की “सजीव सूष्ट्रो ची उक्कानिं” शीष के जीवन-विकास की प्रस्तुत पुस्तक को हिन्दी-भाषियों के सम्मुख रखते हुए हमें हर्ष है। पुस्तक अपने विषय की मानी हुई चोरी है। प्रोफेसर सदाशिव नारायण दातार (एम० ए०, बी० एस-सी०) इसके लेखक हैं; और वडौदा की ‘श्री सयाजी साहित्य-माला’ ने अपने विज्ञान-गुच्छ में इसे गूंथा है, जो देशी भाषाओं के साहित्य की अभिवृद्धि करने के लिए ही श्रीमान वडौदा-नरेश की सहायता से अस्तित्व में आई है। इसके हिन्दी-अनुवाद के लिए श्रीयुत दातार और वडौदा-नारायण के विद्याधिकारी महाशय ने जिस उदारता के साथ सहमति और अनुमति प्रदान की है, उसके लिए हम उनके कृतज्ञ हैं। साथ ही पुस्तक के अधिकांश च्लाक भी हमे उन्हींसे मिले हैं, जिसके लिए वे धन्यवाद के पात्र हैं। विकासवाद के आचार्य चार्ल्स डार्विन का च्लाक स्थानीय ‘राजस्थान-सन्देश’ को कृपा से मिला है, इसलिए वह भी हमारे धन्यवाद का पात्र है।

इस पुस्तक में हिन्दी-पाठकों को एक नई और मनोरंजक सामग्री पढ़ने को मिलेगी। जीवन-विकास की पेचीदा पर मनो-रंजक बातें पढ़ते-पढ़ते कही उन्हे आश्र्य होगा, कही हँसी आयगी, और कहीं कोध, आश्र्य नहीं कि अन्त में वे बन्दरों को अपने पूर्व-पुरुष मानने को तैयार भी हो जायें। वे ऐसा मानने को तैयार हो या न हो, इस पुस्तक से कुछ हलचल अवश्य मचेगी। क्या ही अच्छा हो, यदि उससे हिन्दी-संसार में इस विषयक विशेष ज्ञान की लालसा उत्पन्न हो जाय ! ऐसा हुआ सो एक-न-एक दिन हम किसी स्वतंत्र निर्णय पर अवश्य पहुँच सकेंगे। ऐसी लालसा उत्पन्न हो, यही हमारी कामना है ॥

प्रकाशक

---

## क्या है क्या ?

बन्दर से मनुष्य का निर्माण हुआ—यह एक ऐसी बात है कि हम आश्र्यमग्न हो जाते हैं। हम मनुष्यों के पूर्व-पुरुष बन्दर ! यह सुनकर, हममें से किसे त्वेष न आयगा ? कहाँ तो हम वाणी और बुद्धि वाले सम्यताभिमानी, और काँचे बेचारे भूक और अदिक्षित लंगली पशु ! उनका और हमारा क्या सम्बन्ध ? - फिर, सम्बन्ध भी कैसा, वे हमारे पूर्व-पुरुष और हम उनकी सन्तति ! इस बात पर हममें से किसे यक़ीन आयगा ? परंतु जिस बात पर हमें सहसा विश्वास न होता हो, सर-सरी नज़र से देखने में जो हमें ग्रायः असम्भव लगता हो, क्या यह ज़रूरी है कि वह असत्य ही हो ? बहुत बार- हमारी बुद्धि धोखा खाती है; और जो बात हमें निश्चित-रूपेण सत्य प्रतीत होती है वह असत्य, पूर्व असम्भव दीस्तने वाली बात सर्वथा सत्य और सम्भवनीय हो जाती है । अतः कौन आश्र्य, यदि उपर्युक्त कल्पना भी सत्य हो ?

सृष्टि के निर्माण पर ज़रा विचार कीजिए । अपने आस-पास जो विविध सृष्टि हम देखते हैं—तरह-तरह के प्राणी और वनस्पति जो हमें दृष्टिगोचर होते हैं, वे सब कैसे अस्तित्व में आये ? यह एक मनोरंजक और आश्र्यपूर्ण प्रश्न है । साधारणतया दो मत इस सम्बन्ध में पाये जाते हैं । एक तो यह कि परमेश्वर ने जब सृष्टि का निर्माण किया तो उसके साथ ही यह सब विविध रूपना भी की; मतलब यह कि जितने

भी प्रकार के विविध प्राणी और वनस्पति आदि हमें आज दिखाई पड़ते हैं, सृष्टि-कर्ता ने उन सबका पृथक्-पृथक् एकसाथ निर्माण किया। इसके विपरीत दूसरा मत यह है कि आज हम जो अनेक प्रकार के विविध प्राणी और वनस्पति देखते हैं, सृष्टि के आरम्भ में, वेऐसे नहीं थे। आरम्भ में उत्पन्न प्राणी एवं वनस्पति तो विलकुल सरल-सादा थे। बाद में उनमें थोड़ा-थोड़ा परिवर्तन होना शुरू हुआ, जिससे कालान्तर में उनसे कुछ विभिन्न जातियाँ उत्पन्न हुईं। फिर तबसे अवश्यक वरावर यही क्रम जारी रहने के कारण, धीरे-धीरे, आज दीखने वाले समस्त विविध प्राणियों और वनस्पतियों का विकास हुआ। भतलव यह कि वर्तमान विविध सृष्टि एकदम निर्मित न होकर शुरू के कुछ सरल-सादा प्रकारों से बढ़ते-बढ़ते ऐसी ई है।

इनमें पहले मत को हम जल्दी ग्रहण करते हैं, क्योंकि उसमें न तो दिमाग़ कड़ाना पड़ता है, न वह भस्त्राभाविक ही ज़ंचता है। इसके विपरीत दूसरी कल्पना हमें बड़ी भौंडी, भस्त्राभाविक अतएव त्याज्य प्रतीत होती है। परन्तु ज़रा गहराई से विचार करें तो हम चौंक पड़ते हैं। जितना जितना सूक्ष्म विचार हम इसपर करें, उतनी ही पहलो कल्पना की भस्त्यता एवं दूसरी की सचाई हमें प्रतीत होती जाती है।

भूमण्डल के अस्तित्व पर हम विचार करें तो हमें मालूम होगा, जैसा कि विज्ञानविद लोग अपनी शोधों के फलस्वरूप बताते हैं, कि पहले तो हमारी यह पृथ्वी भी न थी, हमारा तो कहना ही क्या ! पहले तो सत्त्व, तम और रज से युक्त कोई अव्यक्त एवं विशुद्ध मूलतत्त्व इस विश्व में प्रसूत था, जिसे हमारे यहाँ साख्य ने 'प्रकृति' कहा है। इसके

आद उसकी गति और उण्ठता में क्रम-क्रम से कमी होते हुए, बाद में, उससे सर्व ग्रहों तथा हमारी इस पृथ्वी की भी उत्पत्ति हुई। उस वक्तों तो इसपर रह ही कौन सकता था? परन्तु फिर क्रमशः पृथ्वी ठण्डी होने लगी; और उसी अनुसार इसपर क्रमशः वायु, जल आदि की उत्पत्ति हुई। फिर वनस्पति और प्राणियों का भी उदय और प्रसार हुआ। यहाँ तक कि आज की स्थिति को यह पहुँच गई है।

यह शब्द हो सकती है कि हम मनुष्यों से पहले यदि सृष्टि में स्थित्यन्तर होते रहे, जैसा कि कहा गया है, तो भला हमें उनका पता कैसे लगा? उस समय उन्हें किसने तो लिपिबद्ध किया और कैसे वह हमारे समय तक के लिए सुरक्षित रखा गया? यह प्रश्न सचमुच विचारणीय है; और उस समय का कोई वाक्यायदा इतिहास या अन्य किसी प्रकार का लिखित वर्णन हमें नहीं मिलता, यह भी सत्य है। “परन्तु,” बड़ौल हमारे राष्ट्रपति प० जवाहरलाल नेहरू, “चाहे हमारे पास उस आचीन काल में लिखी हुई किताबें न हों, फिर भी सौभाग्यवश हमारे पास कई ऐसी चीज़ें हैं कि जो लगभग किताब ही की तरह इस संबंधी बहुत-सी बातें बनाती हैं। पहाड़, चट्टानें, समुद्र, नदियाँ, तारागण, रेगिस्तान और प्राचीन प्राणियों के अवशेष (ठरियाँ) — ये तथा इसी प्रकार की अन्य वस्तुयें पृथ्वी के आदि-वर्णन की हमारी किताबें हैं और इस (पृथ्वी की) कहानी को समझने का असली तरीका यही नहीं है कि दूसरों की किताबों में इसका वर्णन पढ़ा जाय, बल्कि स्वयं महान् प्रकृति-पुस्तक को ही देखना चाहिए। × × सदृक पर या पहाड़ की तरफ पढ़े हुए जिन छोटे-सोटे पत्थरों को हम देखते हैं, मानों वह प्रत्येक प्रकृति-पुस्तक

का एक पूँजा है—और, अगर हम उसे पढ़ सकें तो, वह हमें थोड़ी-बहुत बातें बता सकता है। एक छोटे गोल-चमकदार पत्थर के टुकड़े को ही देखें, तो क्या वह हमें कुछ नहीं बताता? बिना नोक-कोनों या किसी प्रकार की धार के वह गोल, चिकना और चमकदार कैसे हुआ? अगर किसी बड़ी चट्टान के छोटे-छोटे टुकड़े किये जायें तो उनमें का प्रत्येक टुकड़ा खुरदरा, आँख-न्देंग और कोने-धार वाला होता है। गोल-चिकने पत्थर ( Pebble ) जैसा बिलकुल नहीं होता है। तब वह ऐसा गोल, चिकना और चमकदार कैसे बना? अगर आँख देखने और कान सुनने की सामर्थ्य रखते हों, देख सुन सकें, तो वह हमें अपनी कहानी सुनाता है। वह कहता है कि एक समय—वह समय अत्यन्त प्राचीन क्यों न हो—वह एक चट्टान का ऐसा ही टुकड़ा था, जैसा कि बहुत-से नर्म-कोनों वाला टुकड़ा किसी बड़ी चट्टान या पत्थर को तोड़ने पर निकलता है। सभवतः वह किसी पहाड़ के किनारे पड़ा रहा। वर्षाकृष्ट में वर्षा का पानी उसे पहाड़ की छोटी धाई में बहाकर चश्मे तक ले गया, जहाँ से धक्का खाते-खाते वह एक छोटी नदी में जा पहुँचा। छोटी नदी उसे बढ़ी नदी में ले गई। इस तमाम समय नदी की सतह में विसटते-विसटते उसके नोक-कोने सिर गये और उसका खुरदरापन मिटकर वह चिकना-चमकदार हो गया। इस प्रकार वह गोल-मटोल चिकना-चमकदार टुकड़ा बना, जिसे हम देखते हैं। किसी प्रकार नदी से वह अलग आ पड़ा और हमें वह मिल गया। अगर वह नदी से अलग न होता और उसके साथ-साथ बहता रहता तब तो वह और भी छोटे-से छोटा होता जाता और अन्त में रेत का कण बनकर अपने अन्य भाईयों के साथ समुद्र-तट को-

सुन्दर बनाता, जहाँ छोटे वज्रे रेत के महल बना-बनाकर खेल सकते हैं। ”<sup>४</sup>

प० जवाहरलाल का कहना है—“जब कि पत्थर का एक छोटा टुकड़ा इतनी बातें बता सकता है, तब पहाड़ और चटाने तथा दूसरी बहुत-सी चीज़ें जो हम अपने आस-पास देखते हैं, उनसे हम कितना ज़्यादा जान सकते हैं ?” † विज्ञानवेत्ताओं ने सचमुच यह जानने की कोशिश की भी है। और आज सृष्टि की उत्पत्ति और विकास की जो बातें हमें उपलब्ध हैं, वे उन्हींके लगातार प्रयत्नों का परिणाम है। प्राच्य-प्राणि-शास्त्र और प्राच्य-वनस्पति-शास्त्र, विज्ञान के इन दो विभागों का काम ही पुराने-से-पुराने प्राणियों और वनस्पतियों के अवशेषों को ढूँढ़ कर उनपर से उस-उस समय की स्थिति का पता लगाना है।

इसी शोध के फल-स्वरूप वैज्ञानिकों का कहना है, मनुष्य जिन्हें आज हम देखते हैं सृष्टि के आरम्भ से ही ऐसेके-ऐसे नहीं चले आ रहे हैं। आरम्भ में तो वातावरण ही ऐसा था कि मनुष्य ही नहीं, पैदु-पक्षी, जीव-जन्तु भी यहाँ न रह सकते थे। जड़ से सृष्टि का आरम्भ हुआ।

❀ Letters from a Father to his daughter, pp 3-4.

[ प० जवाहरलाल ने हरु इस विषय के मर्मज्ञ है, यह शायद बहुतों को मालूम न होगा। कईयों को यह जानकर शायद अचरज भी हो कि वास्तव में प्रकृति-विज्ञान के विषयों में ही उन्होंने हँरलैण्ड में एम० ए० पास किया था। उनकी हाल ही प्रकाशित हुई इस पुस्तक ने इस रहस्य का उद्घाटन कर दिया है। ]

† वही, पृ० ४।

फिर जैसे-जैसे वातावरण बदलता गया—अर्थात् पृथ्वी में ताप घटकर उष्णक होती गई, उसके अनुसार जीव-सृष्टि मी निर्मित और विकसित हुई। “सबसे पहला पौधा प्रोटोकोक्स माना जाता है, जिससे बाद को सुच्छ वृक्ष, छव्र-वृक्ष, वहुपत्रक फर्न, और अन्त में फल फूल वाले पौधों का जन्म हुआ। यह तो पौधों के विकास का क्रम है। पश्चुओं में सबसे पहले विना रीढ़ की हड्डी और विना खोपड़ी वाले जलचरों में सम्भदत बहुत छोटी आरम्भिक मछलियों का जन्म हुआ। ..इसके पश्चात् रीढ़ की हड्डी वाले और खोपड़ी वाले जीवों की उत्पत्ति हुई। तत्पश्चात् जिस युग में वनस्पति-जगत के फर्न-वृक्ष पृथ्वी के अधिकाश भाग को ढके हुए थे, उस समय मछलियों की उत्पत्ति हुई। छव्राकार वृक्षों के समप उरग या सरीसृप अर्थात् साँप के समान पेट से चलने वालों ( Reptiles ) का जन्म हुआ। फल फूल वाले वृक्ष जब पैदा हुए तब दूध पिलाने जाले पश्चुओं का अवतार हुआ और सबसे अन्त में मनुष्य का अवतार हुआ।”<sup>४</sup> सक्षेप में कहे तो, जीव-सृष्टि का आरम्भ शंखोत्पादक प्राणियों से हुआ, फिर सरीसृप, मत्स्य, सस्तन और उन सस्तन प्राणियों के विविध प्रकारों में से मनुष्यनुभा बन्दर होकर उनसे हम मनुष्यों का अवतरण हुआ है। यही विकासवाद है—और, इसके अनुसार, मनुष्य अवतरण होने वाली सृष्टि की अन्तिम और सर्वोत्तम कृति है।

प्राणी और उसके आस-पास की परिस्थिति ( The Organism and its environment ), ये दो विकास के मुद्दे हैं। † नवजब

<sup>४</sup> ‘विज्ञान’ ( दिसम्बर १९२९ ), पश्चुओं का अवतार, पृ० ११२।

† New Age Cyclopaedia ( Vol. IV ), P. 299.

कोई परिवर्तन होता है तब-तब एक नई परिस्थिति उत्पन्न होकर उसमें टिक सकने की समस्या उत्पन्न होती है—शास्त्रीय भाषा में कहें तो, जीवन के लिए संघर्ष या कलह उत्पन्न हो जाता है । ऐसी हालत में यह आवश्यक है कि उस परिवर्तित स्थिति के अनुसार बना जाय, नहीं तो अस्तित्व-असम्मद है । यही कारण है कि परिस्थिति में जैसेहीसे परिवर्तन होता जाता है, उसीके अनुसार प्राणियों की शारीर-रचना भी बदलती जाती है—और फिर, आनुवंशिक संस्कारों के अनुसार, भावी पीढ़ियों में वह फ़ूँक लगातार बढ़ते हुए अन्त में उन प्राणियों के सारे रंग-रूप ही बदल जाते हैं । यही विकासवाद की मूल कल्पना है । इसीको प्राकृतिक और वैष्यिक तुनाव में विभक्त किया गया है, जिससे कि इस परिवर्तन को समझने में सहृदयित होती है ।

आधुनिक रूप में इसका प्रतिपादन पश्चिम से हुआ है; और जिन्होंने इसकी शोध की है, उनमें चार्ल्स डार्विन सबसे प्रमुख है । मूल कल्पना तो उससे पहले ही उठ चुकी थी, परन्तु उसे सुलझा हुआ और व्यवस्थित रूप उसीने दिया । उसने तथा अन्य विकासवादी विज्ञानवेत्ताओं ने विविध शोधों और प्रमाणों द्वारा विकास का चित्रपट तैयार करके यह स्पष्ट कर दिया है कि मनुष्य ही जीव-सृष्टि की अन्तिम रचना है और उसका विकास बन्दरों से हुआ है । यहाँ पशुओं और मनुष्यों के फ़ूँक का जो प्रश्न उठता-है, शास्त्रज्ञों ने, विविध उदाहरणों द्वारा, उसका भी समाधान किया है । बुद्धिमत्ता और वाणी, ये दो ऐसी चीज़ें हैं कि जिनपर हम मनुष्यों को गर्व है और हम पशुओं के वंशज होने का विरोध करते हैं; पर विज्ञानवेत्ताओं ने दोनों की इस विषयक तुलना करके

हमारे इस गर्व को अमात्मक सिद्ध कर दिया है। उन्होंने सिद्ध किया है कि पशुओं में भी हमारी तरह मन व दुष्टि है, उनकी अपनी वाणी भी है, यह दूसरी बात है कि उनमें ये चाँड़े हमारे जितनी विकसित नहीं हैं—हमसे घटकर हैं। परन्तु किसी गुण का कम-ज्यादा विकास तो हम मनुष्यों में परस्पर भी तो होता है—बल्क और बढ़े की वाणी-दुष्टि में, ऐसे ही जंगली और सभ्य मनुष्यों में भी, इन सब विषयों में काफ़ी अन्तर रहता है।

जीवन-विकास की इन्हीं सब बातों का प्रस्तुत पुस्तक में वर्णन है। पुस्तक के केखक प्रोफेसर सदाशिव नारायण दातार ( एम० ए०, बी० एस-सी० ) इस विषय के विद्वान हैं, अतएव उनका वर्णन सिलसिलेवार के साथ ही सरल और रोचक है। जहाँ अंग्रेजों में इस विषय की अनेक छोटी-बड़ी पुस्तकें हैं, वहाँ देशी भाषाओं में उनका अभाव है। यह एक खटकने वाली बात है। इसी भावना से प्रेरित होकर, इस विषयक कई अंग्रेजी पुस्तकों के आधार पर, आपने मराठी में इसे लिखा। जो लाभ इससे मराठी-भाषियों को हुआ, हिन्दी-भाषी भी उससे बङ्गिन न रहे, इस खयाल से बड़ी उदारता से आपने उसके हिन्दी-अनुवाद की आज्ञा दी है। उसीके अनुसार यह हिन्दी-रूप मौजूद है।

एक बात ध्यान रखने की है। विकासवाद का जबसे उदय हुआ है, यह विवाद का प्रश्न रहा है। अपने पूर्वग्रहों के कारण मनुष्य इस बात को सुनते ही चिढ़ उठते हैं कि इस बन्दरों की ओलाद हैं, इसलिए उचित-अनुचित युक्तियों से वे इसका विरोध करते ही रहते हैं। साथ ही इसके समर्थक भी अपने जोश और खिलाहट में कभी-कभी सीमा से

चढ़कर इसका प्रतिपादन करने लगते हैं। यही कारण है कि दोनों के बीच की खाई मिट नहीं पाती। प्रस्तुत पुस्तक में इन बातों से ऊपर उठने का प्रयत्न किया गया है। विवादास्पद बातों को जहाँ तक हुआ छोड़ कर केवल ऐसी ही बातों पर विचार किया गया है कि जो सामान्यत, सबको मान्य हो सकती हैं। साथ ही, जहाँ ज़रूरत हुई, विकासवादियों पर टीका भी की गई है। आम तौर पर यह जो समझा जाने लगा है कि विकासवाद का मतलब लगातार प्रगति होते रहना ही है, हसे अमान्यक सिद्ध किया गया है। यह ज़रूर है कि सृष्टि-विकास के उदाहरण में हमें अभी तक प्रगति ही हुई दिखाई पड़ती है, पर यह ज़रूरी नहीं कि हमेशा प्रगति ही होती रहे। केसक का मत है, “विकास के साथ प्रगति ही होनी चाहिए, यह क्षेपना ग़लत है। विकास के साथ जैसे प्रगति होना सम्भव है, वैसे ही अवनति भी हो सकती है।” क्योंकि, असल में तो यह परिस्थिति पर निर्भर है, परिस्थिति अस्ती हो तो प्रगति होगी, और अच्छी न होगी तो अवनति होगी। इस स्पष्टीकरण से, आशा है, बहुतों का समाधान हो जायगा और वे इस सम्बन्धी अपनी ज़िद पर अढ़ने के बजाय अपनी सारासार-बुद्धि से इसपर विचार करेंगे।

अजमेर,  
श्री वसन्तपञ्चमी, १९८६। }

मुकुटविहारी वर्मा



	पृष्ठ
१—विकासवाद	३
२—विकास के प्रमाण	२८
३—प्राकृतिक चुनाव	६५
४—प्राकृतिक चुनाव के प्रमाण	८४
५—वैपर्यिक चुनाव और डार्विनवाद	१०२
६—स्पष्ट प्रमाण	११९
७—मनुष्य का विकास	१४०
८—मनुष्य और बन्दर	१५७
९—बन्दर से मनुष्य ?	१७४
१०—पशुओं का मन और तुद्धि	२१८
११—मनुष्य और जानवर	२४५
१२—सामान्य भ्रम	२७७

# चित्र-सूची

१—अमीवा और उसका विभाजन	६
२—उत्पत्ति और विकास	७
३—मनुष्य का हाथ और देवमछली का पर	३४
४—देवमछली	३४
५—सीलमछली	३५
६—प्राचीन, अर्वाचीन पक्षी और चिमगादड़	३५
७—मनुष्य का गर्भ-कोश	४४
८—मेराड़कों के स्थित्यन्तर	४४
९—विविध प्राणियों के अवतार और उनकी प्रबलता	४५
१०—विकास का चित्रपट	४५
११—जिराफ	६७
१२—घोड़ा और उसकी कुछ क्लिस्मे	९०
१३—भिन्न-भिन्न प्रकार के कबूतर	९१
१४—फूल, पत्ते तथा लकड़ी पर रहने वाले उन जैसे कीड़े	९६
१५—प्रारुज्ज पक्षी और उसके रंग	९७
१६—‘विल’ पक्षी	१०४
१७—‘वया’ पक्षी और उसका बगला	१०४
१८—घोड़ा और मनुष्य	१२६
१९—फीनेकोड़स	१२६
२०—घोड़े का विकास	१२७

२१—घोड़े के पैरों का विकास	१२७
२२—गिरन	१६०
२३—ओरंग उत्तान	१६०
२४—चिम्पज़ी	१६०
२५—गुरिला	१६१
२६—मनुष्य और मनुष्यनुमा बन्दरों की ठठरियाँ	१७६
२७—रीढ़ की हड्डियाँ	१७६
२८—छोटे बालक शाखा के सहारे लटक रहे हैं	१७७
२९—पूष्पवंशीय प्राणियों के मन्तिष्क	१९०
३०—मनुष्य की गर्भावस्था में होने वाली वृद्धि	१९४
३१—	१९४
३२—	१९४
३३—चार महीनों में गर्भ की वृद्धि	१९५
३४—मनुष्य का गर्भ ( तीसरे सप्ताह )	१९६
३५—पूँछ वाला बालक	१९७
३६—बालक—गर्भाशय के अन्दर	२००
३७—बालक—गर्भाशय के बाहर	२००
३८—खड़े होकर चलने वाला बन्दर-मनुष्य	२०१
३९—मनुष्य और मनुष्यनुमा बन्दरों का सम्बन्ध	२१६
४०—चार्ल्स डार्विन	२१७



22 S. V

# जीवन-विकास

उन्नीसवीं शताब्दी के बौद्धिक एवं वैज्ञानिक वातावरण में यूरोप के अन्दर जो अनेक उल्लट-फेर हुए, उनमें विकासवाद का प्रमुख स्थान है, और इसका कारण है विकासवाद की अत्यन्त व्यापकता। विकास की कल्पना यथापि प्रधानतः प्राणि-शास्त्री, वनस्पति-शास्त्री एवं भूगर्भ शास्त्रियों से निकली है और प्राणि-शास्त्र, वनस्पति-शास्त्र एवं भूगर्भ-शास्त्र के द्वारा ही उन्होंने इसे सिद्ध किया है, तथापि यह तत्त्व इतने व्यापक स्वरूप का ह कि अनेक दूसरे शास्त्रों पर भी इसका थोड़ा-बहुत असर हुए बिना न रहा। × × यह कहने में भा काँई आपचि नहीं कि, आधुनिक समाजशास्त्र की सारी इमारत ही विकासवाद पर स्थापित है। × ×

× × × इस सिद्धान्त के कारण हमारे सम्बाध की मानव-जाति की कल्पना बिलकुल बदल गई है। विकासवाद ने सुष्ठि के प्रति मनुष्य के दृष्टिकोण को बिलकुल बदल दिया है। × ×

× × × मनुष्यों की आँखों में अहकार और पूर्वग्रह का जो रोग छाया हुआ था, विकासवाद ने उसे नामशेष कर दिया; उनकी आँखों का पर्दा हट जाने से उन्हें सारी सुष्ठि अपने यथार्थ स्वरूप में दीखने लग गई—और, इस प्रकार, सत्यान्वेषण का मार्ग खुल गया।

## विकासवाद

**अ**पने चारों तरफ, अगर हम नज़र डालें, तो सृष्टि में तरह-तरह के पदार्थ हमें दिखाई देंगे। भिन्न-भिन्न शास्त्रवेत्ताओं ने उन सभी पदार्थों का, अपने-अपने शास्त्रों की सुविधा के अनुसार, भिन्न-भिन्न रीति से वर्गीकरण किया है। उदाहरण के लिए, पदार्थविज्ञान-शास्त्र में इन सब पदार्थों की स्थिति का विचार करके धूनरूप, द्रवरूप और वायुरूप नाम से इनका वर्गीकरण किया गया है। रसायन-शास्त्र में इन्हीं पदार्थों का वर्गीकरण सेन्द्रिय, और निरिन्द्रिय के रूप में हुआ है। इसी प्रकार हम भी अपने विषय के अनुरूप ही इन पदार्थों का वर्गीकरण

करेंगे। अर्थात्, आरम्भ में, इन सब पदार्थों को हम दो भागों में विभक्त करेंगे—एक जीव और दूसरा निर्जीव।

इस वर्गीकरण में, एक बात पर हमें ध्यान रखना होगा। वह यह कि जीव शब्द का व्यवहार यहाँ जरा व्यापक रूप में किया गया है, जब कि निर्जीव शब्द का कुछ संकुचित अर्थ में किया गया है। मामूली तौर पर जीव शब्द से केवल प्राणियों (जीवधारियो) का वोध होता है, वनस्पतियों का नहीं, परन्तु यहाँ जीव शब्द के अन्दर प्राणी और वनस्पति दोनों का समावेश किया गया है। क्योंकि डा० जगदीशचन्द्र बसु की स्तोर्जो से अब यह एक प्रकार से सिद्ध ही हो चुका है कि प्राणियों के समान ही वनस्पतियों में भी न केवल हलचल, श्वासोच्छ्वास आदि कियाये ही होती हैं, बल्कि वे प्राणियों की भाँति संवेदना (सुख, दुःख आदि) का भी अनुभव करते हैं। ऐसी दशा में, जैसा कि ऊपर कहा गया है, जीव शब्द का व्यापक अर्थ में उपयोग करना किसी प्रकार अनुचित या आपत्ति-जनक नहीं है। अस्तु।

इस प्रकार सब पदार्थों के दो भाग कर देने पर, अब हम पहले उनमें से जीव-सृष्टि पर विचार करेंगे। जीव-सृष्टि को भी, जैसा कि ऊपर बताया जा चुका है, हमें प्राणी और वनस्पति इन दो सुख्य भागों में बाँटना होगा। इनमें भी वनस्पतियों पर विचार करने बैठें तो अनेक वनस्पतियों ऐसी मिलेंगी, जो एक-दूसरे से

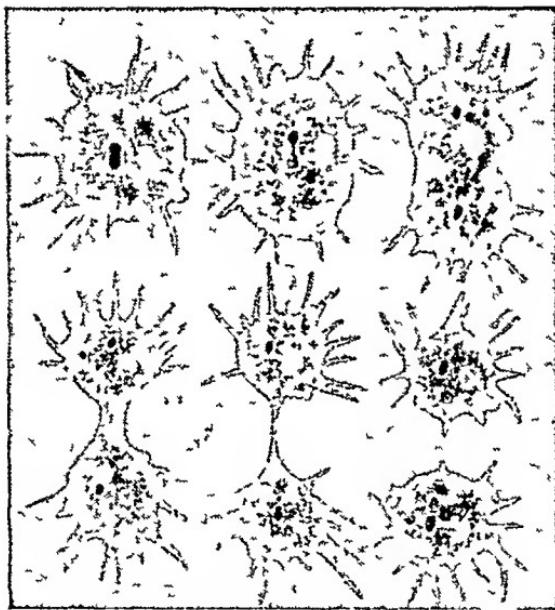
विलकुल ही भिन्न हैं। एक और पानी पर जमने वाली काई जैसी अनेक बनस्पतियाँ ऐसी दिखाई पड़ेंगी, जो अत्यन्त क्षुद्र और साधारणतः निरपयोगी हैं; दूसरी ओर बड़, पीपल, सागौन, चीढ़ जैसे बड़-बड़े और मनुष्योपयोगी अनेक वृक्ष भी हमें मिलते हैं। बनस्पति ही क्यों, प्राणियों में तो यह विरोध और भी बहुद् परिमाण में दिखाई पड़ता है। प्राणियों में कुछ जीव-जन्तु तो इतने ज़रा-से होते हैं कि सूक्ष्म-दर्शक यत्र की मदद के बिना सिर्फ़ आँखों से तो वे दिखाई ही नहीं पड़ते। धारण-पोषण की उनकी क्रिया बड़ी सादी है; और हाथ, पैर, पेट आदि जो अवयव साधारणतया प्राणियों में होते हैं उनका इनमें चिह्न तक दृष्टिगोचर नहीं होता। चित्र नं० १ में प्रदर्शित प्राणी इसी प्रकार का है। यह प्राणी कीचड़ या पानी के गहरे में पाया जाता है। इसका शरीर सिर्फ़ एक, और वह भी अत्यन्त सूक्ष्म, कोश का बना होता है। मगर सूक्ष्म-दर्शक यत्र लगाकर थोड़ी देर तक गौर से अगर हम इसे देखें, तो हमें पता लगेगा कि अन्य प्राणी जिस प्रकार खाने, पीने, सन्तानोत्पत्ति आदि की क्रियायें करते हैं वैसे ही यह भी अपने सब व्यवहार कर सकता है। इसके शरीर के चारों तरफ हाथों की अंगुलियों की नाई जो भाग आगे को निकलं दुए दीखते हैं, थोड़ी देर के लिए उन्हें हम इसके पैर ममक लें तो, वे पैर तो बराबर हिलते ही रहते हैं। इसके खाने-

योग्य कोई प्राणी इसके पास आया नहीं कि तुरन्त ही इसने अपने पैरों को उसके नीचे फैलाकर भट्ट उमेर लिंगाला नहीं! इसे चरा धक्का दिया नहीं कि, चोट के भय में, अपने पैरों को सिंकोड़ कर तुरन्त स्तब्ध हो जाता है और कुछ देर वैसा ही बना रहकर फिर पूर्ववत् ही अपना अमल-दरामद शुरू कर देता है। सन्तानोत्पत्ति का इसका ढङ्ग बड़ा सादा है, जैसा कि चित्र नं० २ में बताया गया है। इसके शरीर को जैसे-जैसे पोषण मिलता जाता है, वैसे वैसे इसके आकार में भी बृद्धि होती जाती है। आगम्भ में तो इसके एक-कोश मय शरीर के अन्दर, चित्र में जहाँ काले विन्दु से केन्द्र बनाया गया है, दो भाग होते हैं; पश्चात शेष शरीर के भी दो भाग हीन लगते हैं; और अन्त में, दोनों भाग पृथक्-पृथक् होकर, स्वतंत्र रूप से अपना-अपना जीवन-न्यापन करने लगते हैं। अमीबा ( Amoeba ) इनका नाम है।

यह, अर्थात् अमीबा, तो हुआ अत्यन्त सूक्ष्म और सादा प्राणियों का उदाहरण, परन्तु जो प्राणी इनके भव्य होते हैं वे और भी कितने छोटे होगे, इसकी कल्पना स्वयं पाठक ही करले। इसके विपरीत बाघ, सिंह, हाथी इत्यादि अनेक प्रकार के ऐसे प्राणी भी इस जीव-सृष्टि में हमें दिखाई पड़ते हैं जो खूब बड़े, ऊँचे दर्जे के, और सर्व-इन्द्रिय-सम्पन्न हैं। और मनुष्य ने तो अपनी बुद्धि के सामर्थ्य से इनसे भी ऊँचा स्थान प्राप्त कर लिया है।

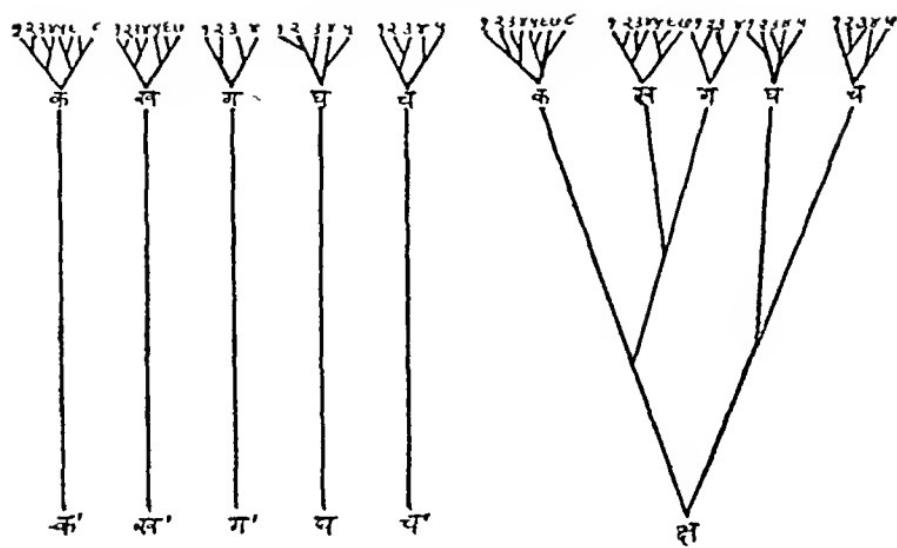


## चित्र नं० १



अमोर्फाओर उसका विभाजन

## चित्र नं० २



उत्पत्ति

विकास

तरहन्तरह के इन प्राणियों और एक-दूसरे से विलक्षण विभिन्न दीखने वाले असंख्य वनस्पतियों पर यदि हम किञ्चित दृष्टिपात्र करें, तो सहज ही हमारे मन में यह प्रश्न उठता है—“तरहन्तरह के ये सब जीव भला कैसे उत्पन्न हुए होंगे?” प्रत्युत पुल्लक में इसीपर विचार किया जायगा।

जीवन्सृष्टि की उत्पत्ति पर विचार करते समय, वैसे तो, हमके साथ ही निर्जीव सृष्टि की उत्पत्ति का भी वार्तविक विचार करना आवश्यक है; परन्तु वित्तार-भय से अभी हमें इस प्रश्न को स्युगित ही रखनेगे। इसी प्रकार, जीवन्सृष्टि की उत्पत्ति पर विचार करते समय, प्रारम्भ में इस बात पर भी विचार करना आवश्यक है कि निर्जीव या जड़ से जीव या चेतन की सृष्टि कैसे हुई? यह प्रश्न अत्यन्त विवादार्पण परन्तु भाय ही मनोरञ्जक भी है। मगर किलहाल तो इसपर भी हमें विचार नहीं कर सकते। जिस किसी भी तरह हो, हम तो अभी इन बातों को गृहीत ही मान लेते हैं कि सृष्टि में पहले निर्जीव या जड़ की उत्पत्ति हुई और फिर उससे जीव की हुई। इन दोनों बातों को गृहीत मानकर यहाँ हमें जिस बात पर विचार करना है वह तो खास तौर पर यही है कि इसके बाद विविव वनस्पतियों और प्राणियों के द्वारा जीव ने जो अनन्त रूप धारण किये वे उसे कैसे प्राप्त हुए? जीवन्सृष्टि का जो अपार विस्तार आज हमें दिखाई पड़ रहा है वह कैसे हुआ?

अथवा इस भूतल पर असंख्य वनस्पति और प्राणियों का जो बृहद् जाल-न्सा फैला हुआ हमें दिखाई पड़ता है उसके भिन्न-भिन्न सागे कैसे बने होगे ?

इस प्रश्न पर ज्ञान के साथ विचार करें, तो समान्य मनुष्य को इसके दो ही उत्तर सूझ सकते हैं। एक तो यह कि जीव-सृष्टि को आज हम, जिस रूप में देख रहे हैं जगत् के आरम्भ में भी यह ठीक इसी प्रकार, की थी और आरम्भ से लेकर आज-पर्यन्त वह ज्यों की त्यो ही चली आ रही है। आम या गुलाब के जो दरख्त आज हम देखते हैं, उनका मूल भी ऐसा ही था, अर्थात्, आरम्भ ही से वे ऐसे के ऐसे ही चले आ रहे हैं। कुत्तों के जो विविध प्रकार आज हमें दीखते हैं, सृष्टि के आदि में भी वे इसी प्रकार थे। अर्थात्, आज जो 'बुलडाग' हम देखते हैं, उसके पूर्वजों को भी अनादिकाल में परमेश्वर ने मानों ठीक ऐसा का ऐसा घड़ा था। आज हमें जो 'ग्रेहाउण्ड' दीखते हैं, उनके आदि-पुरुष भी मानों इसी प्रकार के थे। मतलब यह कि आज हमें तरह-तरह के जो वनस्पति एवं प्राणी दृष्टिगोचर होते हैं, इस उपपत्ति के अनुसार, सृष्टि के आरम्भ में ही वे ठीक ऐसे ही निर्मित हुए थे और वर्तमान जीव-सृष्टि मानों उनका विस्तार-मात्र है। यह तो एक विचार-शैली हुई। पर इसके विपरीत भी एक विचार-शैली है। वह यह कि आज हम जो प्राणी और वनस्पति

देखते हैं, पहले, अर्थात् अत्यन्त प्राचीन—आदि—काल में, वे आज जैसे बिलकुल न थे। सृष्टि के आरम्भकाल में उत्पन्न प्राणी और वनस्पति तो बिलकुल सरल-सादा थे; आज उनमें जो विविधता आ गई है, उसका तो उस समय उनमें लेश-मात्र न था। बाद में धीरे-धीरे वनस्पति और प्राणियों में थोड़ा-बहुत फेर-बदल होने लगा, जिससे कालान्तर में कुछ विभिन्न ही प्राणी एवं वनस्पति उत्पन्न हुए। और पूर्वकाल से आज-पर्यन्त अनेक वर्षों से यही क्रम ज्यों का त्यो जारी रहने के कारण ही प्रारम्भ के अत्यन्त सादा व थोड़े-से वनस्पति एवं प्राणियों से ही आज, दीखने वाले सब विविध प्राणियों और वनस्पतियों का विकास हुआ है।

जीव-सृष्टि की उत्पत्ति के सम्बन्ध में यही दो परस्पर विरोधी उपपत्तियाँ उपलब्ध हैं; इनके अतिरिक्त, और कोई उपपत्ति हमारे देखने में नहीं आई। इनके अनुसार, एक हृष्टि से तो, यह कहना चाहिए कि इस जीव-सृष्टि में आरम्भ से लेकर आज-पर्यन्त कोई एक भी फेर-बदल या परिवर्तन नहीं हुआ। प्राणी और वनस्पतियों के जितने प्रकार आज हम देखते हैं उनका प्रत्येक का सृष्टि के आरम्भ में ईश्वर ने स्वतंत्र रूप से ही निर्माण किया था और आज तक वही सब प्रकार (जातियों या किसीमें) ठीक उसी रूप में चले आ रहे हैं। इसके विपरीत, दूसरी हृष्टि से हम यह कहेंगे कि सृष्टि में लगातार परिवर्तन होता चला आ रहा

है। आज हमे जो विविध प्राणी एवं वनस्पति सृष्टिगोचर होते हैं, सृष्टि की उत्पत्ति के समय, अर्थात् अत्यन्त प्राचीन—अनादि—काल में, उनके पूर्वज भी ठीक ऐसे ही नहीं थे। उस समय पैदा होने वाले जीव-जन्तु तो अत्यन्त सादा और सूक्ष्म थे। बाद में, ज्यों-ज्यों समय बीतता गया, धीरे-धीरे उनमें कुछ-कुछ भिन्नता होती गई। कालान्तर में, इससे उनमें से कुछ निराले ही और उन्हें दर्जे के प्राणियों का आविर्भाव हुआ; और, यही क्रम आज भी ऐसा ही चला आने के कारण, आज की यह अपार जीव-सृष्टि भी उन्हें से उत्पन्न हुई है। मतलब यह कि जो जीव-सृष्टि आज हमें दिखाई पड़ती है, इस उपपत्ति के अनुसार, उसका निर्माण और सभी में निर्मित कुछ थोड़े से प्राणियों और वनस्पतियों से ही हुआ था। परन्तु उसके बाद उन अल्पसंख्यक जीवों का उसी प्रकार पीढ़ी-दर-पीढ़ी विकास होता गया, जैसे कि किसी बीज से बैढ़ते-बैढ़ते कालान्तर में प्रचरण वृक्ष खड़ा हो जाता है, और उसीके फैले-स्वरूप, इस विकास के लगतार होते रहने से, आज की इस अपार जीव-सृष्टि के रूप में उनका विस्तार हो गया। इस दूसरे प्रकार की उपपत्ति का ही नाम ‘विकासवाद’ है। ‘विकास’ शब्द संस्कृत-भाषा का है; और इसका अर्थ है—प्रसार, फैलाव, क्रमशः उन्नत होना। क्षेत्र अंग्रेजी के ‘इवॉल्यूशन’ (Evolution) के हिन्दी-शब्दसार, पृष्ठ ३१३४।

## विकासवाद

शब्द के अर्थ में यह प्रयुक्त है, जिसकी धोत्वर्थ है—किसी लिपटी या उलझी हुई वस्तु को खोलना या सुलझाना। इंस प्रकार, इस पर से, इस शब्द का अर्थ हुआ—किसी पदार्थ का एक स्थिति से निकल कर उसमे अपेक्षाकृत अधिक प्रसृत किवा अधिक प्रशस्त अन्य स्थिति मे प्रवेश करना। इसी प्रकार जिसे क्रिया के द्वारा पदार्थ-मात्र एक स्थिति से क्रम-पूर्वक बढ़ते हुए अपेक्षाकृत विस्तृत स्थिति मे प्रवेश करते हैं, उसका नाम है विकास; और किसी प्राणी का विकास होना मानो उस प्राणी की जाति मे क्रमशः परिवर्तन होते हुए कालान्तर में उससे भिन्न प्रकार की एक नई ही क्रम या जाति का उत्पन्न होना है।

जिन दो उपपत्तियो का ऊपर वर्णन किया गया है, सर्वस्त्री नज़र ढालने पर, उनमे से पहली ही ठीक मालूम होगी, जब कि दूसरी सम्भवत् केवल अशक्य और इसलिए त्याज्य प्रतीत होगी। क्योंकि, अपने जीवन-काल में, दूसरी उपपत्ति के अनुसार होनेवाला अन्तर हम कही नहीं देख पाते। विकासवाद के सिद्धान्तानुसार तो किसी एक प्राणी से क्रम-पूर्वक न केवल अन्य प्राणियो की उत्पत्ति ही सम्भव है; वलिक इस समस्त जीव-सृष्टि की उत्पत्ति भी इसी क्रम के अनुसार हुई है। परन्तु हम तो अपने जीवन मे विली से कुत्ते, अथवा कनेर के पेड़ से गुलाब के दरख्त, पैदो होते नहीं देखते; उलटे हमे तो प्रत्यक्ष यही दिखाई पड़ता है कि

कई पीढ़ियाँ गुजर जाने पर भी कुत्ता से कुत्ते ही पैदा होते हैं और कनेर के पेड़ में कनेर ही के फूल लगते हैं। यही कारण है कि विकास के सिद्धान्त के बारे में, शुरू में, हमें शङ्खा ही होती है।

लेकिन अगर हमारे जीवन में कोई बात होती हुई हमें नहीं दिखाई पड़ती तो इसका मतलब यह नहीं कि वह कभी हो ही नहीं सकती। कल्पना कीजिए कि भरपूर वसन्त-ऋतु में, जब कि चारों ओर फूल ही फूल दृष्टिगोचर होते हैं, एक भौता पैदा होता है। और वसन्त के समाप्त होने में पहले ही उसका अल्पकालिक जीवन समाप्त हो जाता है। इस प्रकार जबतक वह जीवित रहा उसके सब दिन किसी रम्य उपवन में एक पुष्प से दूसरे पुष्प पर उड़ते हुए ही बीने। ऐसी दशा में पृथ्वी का पृष्ठभाग उसके लिए तो मानो एक सुन्दर-सुगन्धित पुष्पोद्यान ही रहा। अतएव उसकी सहज कल्पना यही होगी कि इम पृथ्वीतल पर सदा-सर्वदा चमन्त-ऋतु ही छाई रहती है। परन्तु उसकी ऐसी कल्पना कितनी संकुचित एवं अदूरदर्शिता पूर्ण है, यह कौन नहीं जानता? इसी प्रकार हमारी उक्त विचार-शैली भी न केवल इतनी ही प्रत्युत् इसमें भी अधिक संकुचित न होगी, ऐसा कौन कह सकता है? क्योंकि, शांधकों के मतानुसार, सृष्टि पर जीवोत्पत्ति हुए न्यूनाति-न्यून ३-४ करोड़ वर्ष तो ही चुके हैं। तब, इस विस्तृत काल

के दर्शान क्या-क्या पदार्थ बने, इसका अनुमान केवल एकाध जुबकी लगाकर ही कैसे लगाया जा सकता है ?

सारांश यह कि जीव-सृष्टि की उत्पत्ति के सम्बन्ध में जो दो उपपत्तियाँ दो गई हैं उनके सम्बन्ध में सहसा यह नहीं कहा जा सकता कि उनमें सं एक शक्य और दूसरी अशक्य अतएव त्यज्य है। क्योंकि, जैसा कि उपर्युक्त विवेचन से पाठक समझ गये होंगे, दोनों उपपत्तियाँ एक समान ही शक्य हैं।

इस सम्बन्ध के ऐतिहासिक वर्णन को देखें तो मालूम होगा कि जीव-सृष्टि की उत्पत्ति-सम्बन्धी इन दोनों उपपत्तियों के संबंध में न केवल आज से ब्रह्मिक बहुत प्राचीन काल से ऐसी ही अस्पष्ट कल्पना सर्व-साधारण में चली आ रही है। इसी सन् से ६०० वर्ष-पूर्व जो ग्रीक परिदृत हो गये हैं उनके ग्रन्थ में पहली आपत्ति-संबंधी विचार तो मिलते ही हैं; परन्तु आश्वर्य की बात यह है कि दूसरे अर्थात् साधारणतः अर्वाचीन माने जाने वाले इस विकास-वाद के बार मे भी उनके उस ग्रन्थ में थोड़ी-बहुत कल्पना मिलती ही है। इस ग्रीक ग्रन्थकार के ग्रन्थ मे विकासवाद के कौन-कौन प्रमेय कहाँ-कहाँ वर्णित है, इसका विस्तृत वर्णन करना तो यहाँ जरा मुश्किल है, संक्षेप मे सिर्फ यही कहना पर्याप्त होगा कि “जीव की सृष्टि जड़ से हुई, वनस्पतियों की उत्पत्ति प्राणियों से पहले हुई। प्राणियों मे भी पहले नीचे दर्जे के प्राणी हुए, फिर

जैंचे दर्जे के, और उन सबके अन्त में इस भूतल पर मनुष्यों का अवतरण हुआ”<sup>३४</sup> इत्यादि विकासवाद से मिलती-जुलती जो कल्पनायें कितने ही लोगों के ग्रन्थों में गृहीत हैं वे सब उनके उस ग्रन्थ ही से ली गई हैं।

परन्तु इससे भी अधिक नई और आश्वर्यपूर्ण बात तो यह है कि हमारे प्राचीन धर्मग्रन्थों में भी विकासवाद के समर्थक विचार मिलते बताये जाते हैं, जैसा कि लोकमान्य विलक्षण ‘गीता-रहस्य’ से गृहीत निम्न उद्धरण से प्रकट होगा—“विश्वोत्पत्ति के सम्बन्ध में विवेचन होकर सांख्यशास्त्र में जो सिद्धान्त निर्धारित किये गये हैं उनमें से अनेक आधुनिक विकासवाद के सिद्धान्तों से मेल खाते हैं। सांख्य के मतानुसार आरम्भ में सत्त्व, रज, तम, इन तीन गुणों से युक्त कोई अव्यक्त एवं विशुद्ध मूलतत्त्व इस विश्व में अखण्ड रूप से प्रसृत था, जिसे वह ‘प्रकृति’ कहता है। वाद में सत्त्व, रज, तम की साम्यावस्था में पढ़ी हुई उस प्रकृति की तह, उसी प्रकार धीरे-धीरे खुलने लगी, जैसे कि एकबार किसी चीज़ की तह खुल जाने पर वह धीरे-धीरे खुलती ही जाती है। अर्थात् जितनी भी व्यक्त मृष्टि है वह सब क्रम-पूर्वक निर्माण होती हैं। इस प्रकार सांख्य के इस कथन के ‘पायनीयर्म ऑफ़ इवॉल्यूशन’ (Pioneers of Evolution,— Edward Clodd) से।

## विकासवाद

मेरी और (आधुनिक) विकासवाद में वस्तुतः कोई विशेष अन्तर नहीं रह जाता। क्योंकि, विकासवाद के अनुसार भी, तो इस विश्व में आरम्भ में कुछ-न-कुछ विशुद्ध से तभ पदार्थ ही चारों ओर भरे पड़े थे, जिनकी गति और उच्छिता में क्रम-क्रम से कमी होते हुए बाद में उनमें से सर्वग्रहों तथा हमारी इस पृथ्वी की भी उत्पत्ति हुई। इसी प्रकार फिर जैसे-जैसे यह पृथ्वी ठण्डी होने लगी, वैसे-वैसे, इसपर वायु, जल आदि की उत्पत्ति हुई, और, उसके बाद, क्रमपूर्वक वनस्पति एवं प्राणियों की बहुतायत होती गई।” इसमें ध्यान रखने की जो बात है वह सिर्फ यही कि, आधुनिक विकासवादियों और प्राचीन सांख्य की कल्पनाओं में, समता तो है; परन्तु आधुनिक कल्पना का मूल जहाँ प्रयोग-सिद्ध है, अर्थात् प्रत्यक्ष प्रमाणों पर उसकी रचना हुई है, तहाँ प्राचीन कल्पना केवल अनुमानभूत है।

अब अगर यह कहा जाय कि इन दोनों उपपत्तियों सम्बन्धी यह अस्पष्ट कल्पना अत्यन्त प्राचीनकाल से ही मिलती है, तो भी यह तो मानना ही पड़ेगा कि बहुत समय, अर्थात् उन्नीसवीं शताब्दी, तक तो इनमें से पहली उपपत्ति ही सर्वमान्य थी, दूसरी उपपत्ति तो पूरे तौर पर अभी हाल में, अर्थात् उन्नीसवीं शताब्दी के उत्तरार्द्ध में ही, सामने आई है और बाद में अनेक वृष्णों तक प्रथम विचारशैली से मुक्तावला करते रहकर इसने उसकी जगह

प्राप्त की है। अब प्रश्न यह होता है कि 'जीव-सृष्टि' की उत्पत्ति के 'सम्बन्ध में पहली ही कल्पना शतकानुशतक' क्यों प्रचलित रही? बहुत सम्भवतः इस सम्बन्ध में 'बाइबल' में लिखित और इसलिए ईसाई-धर्म के लिए आधारभूत वर्णन अथवा वचनों से इसका मेल खाना ही इसका कारण है। 'बाइबल' में लिखा है कि "सृष्टि के आरम्भ में प्रत्येक प्राणी को ईश्वर ने स्वतंत्र रूप में रचा था," और विकासवादियों का कथन इससे विलकुल उलटा है। इसीलिए पोप और उनके अत्याचारी अनुयायियों के सामने बहुत समय तक विकासवादी आगे न आ सके, तो इसमें आश्चर्य क्या? परन्तु इसके बाद वैज्ञानिक सत्य के ज्ञार पर धीरे-धीरे इस स्थिति का परिवर्तन होना शुरू हो गया। बहुतों को पहली उपपत्ति के विषय में शङ्का उत्पन्न हुई। उन्हें भासित होने लगा कि, जो कुछ हमें प्रत्यक्ष दिखाई पड़ता है, यह उपपत्ति तो उससे सर्वथा विपरीत है। तब उन्होंने दूसरी उपपत्ति पर ध्यान दिया और विकासवाद की शोध जारी हो गई। जिन्होंने इस ओर कदम घढ़ाया उनमें बफन, लेमार्क, स्पेन्सर और डार्विन मुख्य हैं। यह कहा जाय तो भी कुछ हर्ज नहीं कि थोड़े-चहुत परिमाण में यही सब विकासवाद के आधार-स्तम्भ या जनक माने जाते हैं। इनमें अनेक शास्त्रीय (वैज्ञानिक) शोधों के द्वारा विकासवाद को प्रमाणित करने वाला लेमार्क है। विकास

की मूलभूत कल्पना — अर्थात् एक जाति या किसी से धीरे-धीरे (क्रमपूर्वक) अनेक जातियों कैसे उत्पन्न हो सकती हैं, यह बात— उसने साधित कर दी। उसका कहना है कि किसी भी प्राणी को लें तो हम देखेंगे कि उसकी सभी सन्तानें कभी भी विलकुल एकसी या हूँवहूँ नहीं होती। उदाहरणार्थ, किसी बिल्ली के सब बचे हूँवहूँ वैसेके-वैसे नहीं होते—प्रत्येक में थोड़ा-बहुत अन्तर रहता ही है। इसके अतिरिक्त, प्रत्येक व्यक्ति की वृद्धि उसके व्यवसाय पर अवलम्बित रहती है। जिन्हे ज्यादा चलना पड़ता है उनके पैर सख्त और मज्जबूत होते हैं। ठोक-पीट करते-करते लुहार के हाथ कितने सख्त हो जाते हैं, यह हम सब जानते हैं। मरवलव यह कि एक ही माता-पिता के भिन्न-भिन्न बालकों में भी पैदायश के समय थोड़ा-बहुत अन्तर, तो रहता ही है; पश्चात्, व्यवसाय-भेद से, उसमें और वृद्धि-ही होती जाती है। फिर यह भी सभी जानते हैं कि एक ही माता-पिता के सब बालक यदि विलकुल एकसे न हो तो भी थोड़े-बहुत परिमाण में तो उनमें अपने माता-पिता के गुण-अवगुण रहते ही हैं। ऊपर जिन विविध व्यक्तियों का उल्लेख किया गया है उनकी सन्तति भी इसी प्रकार उनके समान, अर्थात् उस-उस गुण-अवगुण से युक्त, होगी ही। और फिर जब वंशानुवंश यही क्रम जारी रहा तो, जैसा कि ऊपर बताया गया है व्यक्ति-व्यक्ति का, यह अन्तर क्रमपूर्वक

अधिकाधिक बढ़ते हुए अन्त में इतना विशाल हो जायगा, कि इम यह कल्पना भी न कर सकेंगे कि इन सब विविध व्यक्तियों की उत्पत्ति किसी एक ही पूर्वज से हुई होगी। इसीलए; दूसरे शब्दों में कहें तो यह कहना होगा कि, एक दूसरे से बिलकुल भिन्न विविध जातियाँ मूल में किसी एक ही जाति से उत्पन्न हुई हैं।

स्पेन्सर को तो यहाँ तक प्रतीत होने लगा था कि सृष्टि की उत्पत्ति-सम्बन्धी जो पहली उपपत्ति है शास्त्रीय भाषा में सो उसे उपपत्ति ही नहीं कह सकते—वह तो एक अज्ञानमूलक शब्द-उत्पत्ति-भाष्ट्र है। उसका कहना है कि इस पृथ्वीतल पर न्यूनति-न्यून तीन लाख बीस हजार ( ३,२०,००० ) प्रकार के प्राणी और बीस लाख ( २०,००,००० ) प्रकार के वनस्पति मिलते हैं; यदि पहली उपपत्ति के अनुसार यह माना जाय कि इनमें से प्रत्येक प्रकार का निर्माण ईश्वर ने स्वतंत्र रूप से ही किया है, तो हमें यह मानना पड़ेगा कि ईश्वर को सृष्टि-रचना करने में तेर्छ स लाख बार निर्माण-कार्य करना पड़ा होगा—और, इससे सिवा गड्ढवड ( गलतफ़हमी ) के और कुछ न होगा। स्पेन्सर के भता-नुसार यह कल्पना अत्यन्य क्षुद्र एवं मूर्खतापूर्ण है और विकास-घास से इस प्रश्न का जो उत्तर मिलता है वही इसकी अपेक्षा अधिक सम्पूर्ण और समाधानकारक है—अर्थात्, नैसर्गिक रूप

में इन सब जातियों या प्रकारों की धृष्टि मूल की कुछ जातियों से ही क्रमपूर्वक हुई है। विकास की कल्पना कितनी व्यापक है और ग्रहमण्डल, समाज, मानसशास्त्र आदि भिन्न भिन्न स्थानों—अर्थात्, ममष्ट्रिलप से, समस्त विश्व-पर वह कैसे लागू होती है, इस बात को स्पेन्सर ने ही पहले-पहल विशद रूप से प्रमाणित किया।

स्पेन्सर ने इस प्रकार विकासवाद को समस्त विश्व पर लागू करके बता तो दिया, परन्तु इतने पर भी लोगों का समाधान न हुआ। क्योंकि स्पेन्सर प्रधानतः तत्त्वज्ञानी ही था, विज्ञानवेत्ता या शास्त्रज्ञ नहीं; अतएव, सर्वसाधारण का समाधान कर देने योग्य, प्रबल एवं प्रयोगसिद्ध प्रत्यक्ष प्रमाण देना उसके लिए सम्भव न था। फिर कुछ लोगों को विकासवाद के प्रति थोड़ी-चहुत सहानुभूति भी हुई तो जबतक वे यह न जान लेते कि विकास क्यों और कैसे होता है तथा उसके युक्तिपूर्ण कारण क्या हैं, वे खुले-आम विकासवाद के सिद्धान्त का मानने के लिए तैयार नहीं हो सकते थे—और, स्पेन्सर इन रहस्यों को खोलने में बिलकुल असमर्थ रहा। यह रहस्य खोलकर सर्व-साधारण के मनों में विकासवाद के सिद्धान्त को पैठाने का श्रेय तो अन्त में खाली ढार्विन नामक सुप्रसिद्ध शास्त्रज्ञ को ही मिला; और, इसके कारण, उसकी इतनी ख्याति हुई कि विकासवादियों में ही

नहीं बल्कि गत-शताब्दी में उत्पन्न सभी शास्त्रों से आज उसका नाम चिरस्थायी हो गया है—यहाँ तक कि कुछ लोग तो इसे ही विकासवाद का जनक मानते हैं। परन्तु हम तो ऊपर देख ही चुके हैं कि डार्विन से पहले ही वफ़न, लेमार्क, स्पेन्सर आदि महानुभावों ने भली-माँति विकासवाद का प्रतिपादन कर दिया था। यह चलूर है कि विद्वद्-समुदाय और ज्ञासकर शिक्षितवर्ग में इस विषय-सम्बन्धी जितनी खलबली सन् १८५९ ई० में इस विषय पर प्रकाशित डार्विन की 'जातियों का मूल' (Origin of species) नामक पुस्तक ने मचाई, उतनी गत-शताब्दी में प्रकाशित और कोई पुस्तक न मचा सकी। पर इसका कारण था। वह यह कि डार्विन ने अनेक वर्षों के संतत परिश्रमपूर्ण प्राणि-शास्त्र एवं वनस्पतिशास्त्र के अध्ययन से जो भरपूर प्रभाण संग्रह किये थे इस पुस्तक में ऐसी सरल और तर्कसम्भव रीति से उन पर से अनुमान निकाल गये कि कोई बालक भी उन्हें भलो-

क ढीन हँगू ने हाल में लिखे हुए अपने एक लेख में समस्त जंगल में आज-पर्यन्त अवतरित होनेवाले महापुरुषों की तालिका दी है। इसमें डार्विन और पाश्चूर को उसने शास्त्रों (विज्ञानवेत्ताओं) में सम्मिलित किया है। यहाँ ध्यान देनेयोग्य जो बात है वह यह कि ढीन हँगू एक बड़ा धर्माचार्य था, मगर उसे भी डार्विन का नाम महापुरुषों की सूची में देना ही पड़ा।

## विकासवाद

भाँति समझ सकता है; साथ ही उसमें खास तौर पर इस बात की मीमांसा भी थी कि विकास कब और कैसे होता है। लेमार्क ने इससे पहले इस सम्बन्ध में जो मीमांसा की, वह हम पहले देख ही चुके हैं। परन्तु उस समय विकासवाद के सिद्धान्त का प्रसार नहीं हो सका था, क्योंकि अनेकों की सृष्टि में वह मीमांसा अपूर्ण थी। अस्तु ।

डार्विन को बालग्रावस्था से ही प्राणिशास्त्र एवं वनस्पतिशास्त्र के अध्ययन की धुन सवार हो गई थी; तरह-न्तरह के फल-फूल, कीड़े-मकोड़े आदि विविध पदार्थ संग्रह करने का शौक उसे बचपन से ही बड़ा सज्जर्दस्त था। अपनी आयु के बाईसवें वर्ष में, इसके लिए उसे एक स्वर्ण-संयोग भी प्राप्त हो गया। दक्षिण-अमेरिका की ओर जाने वाले एक जहाज में उसे सृष्टिशास्त्र का कार्य करना पड़ा। इस सिलसिले में वह पाँच वर्ष तक लगातार प्रवास-नहीं-प्रवास करता रहा। इस प्रवास में उसे जो-जो अनुभव हुए, तथा जो-जो सामग्री उसने संग्रह की, उन्हीं सबके आधार पर प्रवास के बाड़ उसने अपने उक्त ग्रंथ का निर्माण किया। सृष्टि की उत्पत्ति-विषयक प्रचलित पहली उपपत्ति के सम्बन्ध में डार्विन को पहले-पहल जो शङ्का उत्पन्न हुई, वह इसी प्रवास में; और इन पाँच वर्षों के सूक्ष्म-निरीक्षण से उसे यह दृढ़-विश्वास हो गया कि इस जीव-सृष्टि में जो विविधता और

उस विविधता में ही जो एक प्रकार की अवस्थितता दृष्टिगोचर से होती है उस सबका कारण दैवी या ईश्वरीय इच्छा न होकर उसका (विविधता का) मूल नैसर्गिक एवं नियमबद्ध भित्ति पर ही निर्भर होना चाहिए। क्योंकि, अपने प्रवास में उसे कितने ही ऐसे पक्षी मिले कि जो साधारण दृष्टि से देखने में एक-दूसरे से थोड़े-बहुत भिन्न मालूम पड़ते थे; परन्तु वस्तुतः जहाँ उनमें कुछ एक-दूसरे से विलक्षण भिन्न थे वहाँ कुछ मिलते-जुलते भी थे; और तब जिस प्रकार कि क्वायद के समय सिपाहियों की ऊँचाई से उनका क्रम लगाया जाता है वैसे ही उसने भी पारस्परिक अन्तर से ही उनका क्रम लगाया। अर्थात्, 'जिस प्रकार' क्वायद में पास-पास के सिपाहियों की ऊँचाई प्रायः बेरोबर ही मालूम पड़ती है किन्तु अलग-अलग छाँटकर नापने पर उनमें बहुत-कुछ फर्क निकलता है' वैसे ही, इस अनुक्रम में पास-पास की वनस्पतियाँ बहुत-कुछ समान दीखने पर भी जाँच करने पर उसे उनमें बहुत-कुछ फर्क मिला। इस उदाहरण में यदि हम

१ डार्विन से पहले लायल (Lyle) ने अपने 'भूगर्भशास्त्र के सिद्धांत' (Principles of Geology) नामक ग्रंथ में पृथ्वी के पृष्ठभाग को उत्पत्ति-सम्बन्धी जो विचार शैली प्रयुक्त की थी, उसका भी डार्विन के मन पर बहुत-कुछ प्रभाव पड़ा था—यह यहाँ प्रकट कर देना आवश्यक है।

कोई दो प्रकार की वनस्पतियों में से केवल एक-एक वनस्पति को जैकर केवल उसपर ही विचार करें तो, उनमें परस्पर बहुत अन्तर होने के कारण, हमारे मन में यह कल्पना होना सम्भव है कि इनकी उत्पत्ति स्वतंत्र रूप से हुई होगी। परन्तु इसके साथ ही उन दोनों वनस्पतियों के बीच हित अन्य अनेक वनस्पतियों पर भी यदि हम ध्यान दें तो हमारे मन में सहज ही यह शंका उत्पन्न हो जायगी कि ये सब वनस्पति बीच ही में एक-एक उत्पन्न-न होकर इनमें घोड़ा-बहुत पारस्परिक सम्बन्ध एवं क्रम अवश्य रहा होगा और उसी क्रम के अनुसार एक-दूसरे से ही इन सबकी उत्पत्ति हुई होगी। अपने पौंच वर्ष के प्रवास में डार्विन ने जो अनेक प्राणी एवं वनस्पति देखे, उनमें ऐसे अनेक उदाहरण उसे मिले; और उन्हींपर ने, विकासवाद पर उसका विश्वास होने लगा था।

इन सब बातों से जब विकासवाद पर डार्विन का विश्वास जम गया तब उसे यह जिज्ञासा हुई कि सृष्टि में विकास कब और कैसे होता है—अर्थात्, किसी प्राणी या वनस्पति में धीरे-धीरे अन्तर पढ़ते हुए कालान्तर में उनसे भिन्न एक दूसरे प्रकार के प्राणी या वनस्पति की उत्पत्ति कैसे होती है ? अनेक वर्षों तक वह इसपर विचार करता रहा।

अन्त में एक दिन अचानक ही उसे इस रहस्य का पता चल

गया। एक दिन यूंही लेटे-लेटे वह मेथल नामक एक लेखक की लिखी हुई 'जन-वृद्धि की भीमांसा' नाम की पुस्तक पढ़ रहा था, जिसमें यह प्रतिपादन किया हुआ है कि मनुष्यों से जन-वृद्धि भूमिति के नियमानुसार होती है और जीवन के साधन-रूप अन्नादि समस्त (खाद्य) पदार्थों में केवल अद्विग्नित के नियमानुसार इनी-गिनी। अर्थात्, मनुष्यों की प्रत्येक पीढ़ी में जहाँ १ : २ : ४ : ८ के अनुपात से जन-वृद्धि होती है वहाँ जीवन के साधन-रूप अन्नादि पदार्थों में केवल १ : २ : ३ . ४ के अनुपात से वृद्धि होती है। इसीपर डार्विन की कल्पना-वृद्धि जाप्रत हुई। तब अन्य प्राणी एवं बनस्पतियों पर भी उसने इस सिद्धान्त को लागू करके देखा। इसपर से सहजही उसने यह निष्कर्ष निकाला कि प्राणियों की संख्या-वृद्धि की अपेक्षा उनके जीवन के साधन-रूप पदार्थों की वृद्धि जब कम होती है तो यह निश्चय है कि आगे चलकर (अविष्य मे) एक खास समय ऐसा अवश्य आयगा, जब कि लोगों को अन्न की कमी महसूस होने लगेगी, और फिर, ज्यों-ज्यों समय बीतता जायगा त्यों-त्यों, अन्न का वह अभाव और भी अधिकाधिक महसूस होने लगेगा। फिर जब समस्त प्राणियों की उदर-पूर्ति के योग्य अन्न न रहेगा तब, अपनी-अपनी उदर-पूर्ति-योग्य अन्न की प्राप्ति के लिए, उनमें आपस की चढ़ा-ऊपरी मच जायगी; फल-खरूप जिन्हें भरपूर अन्न मिल जायगा वे तो

शेष (जोवित) बब्ब रहेंगे, वाक्ती के सब लोग भूखों मर गिटेंगे। अब विचार यह करना चाहिए कि किसी भी जाति के अनेक व्यक्तियों में, ऐसी चढ़ा-ऊपरी होने पर, कौन से व्यक्ति शेष रहेंगे—अर्थात्, भरपूर अब उनमें से किन्हें प्राप्त हो सकेगा? अस्तु, यह तो हमें मालूम ही है कि किसी एक ही जाति के अनेक व्यक्ति हूबहू एकसे ही कभी नहीं होते। व्यक्ति-व्यक्ति में, एक दूसरे से, योद्धा-न्युत फर्क तो होता ही है। कोई सशक्त तो कोई अशक्त, कोई अपल तो कोई सुस्त, कोई धूर्त तो कोई सरल, इस प्रकार के भेद अवश्यम्भावी हैं। ऐसी हालत में, अब आ अभाव होने पर, अधिक अब तो उन्हीं व्यक्तियों को मिलेगा कि जो अपेक्षाकृत अधिक सशक्त, धूर्त अथवा चपल होंगे; और इस प्रकार इस चढ़ा ऊपरी या संघर्ष में केवल वही व्यक्ति टिक सकेंगे, वाक्ती तो सब उनके पैरों-न्तले रुँदकर समाप्त ही हो जायेंगे। इस प्रकार इस चढ़ा-ऊपरी या संघर्ष में समस्त व्यक्तियों में से केवल ऊपर कहे हुए विशिष्ट गुण-सम्पन्न कुछ व्यक्ति ही विजयी होकर जिन्दा बचेंगे, वाकी सब मर गिटेंगे। इनके बाद उनके आगे की पीढ़ियों में, आनुवंशिकत्व के अनुसार, ये विशिष्ट गुण फिर से विशेष परिमाण में प्रकट होंगे; और, अनेक पीढ़ियों तक यही क्रम जारी रहने पर, अन्त में जो अजा उत्पन्न होंगी वह पहली प्रजा से विलुप्ति भिन्न हो सकेगी।

मतलब यह कि इस उदाहरण में यदि उन प्राणियों की सौ या हजार पीढ़ियों बाद होने वाली प्रजा से प्रारम्भिक पीढ़ी की प्रजा की तुलना की जाय तो मालूम होगा कि वर्तमान प्रजा की अपेक्षा भावी प्रजा कहीं अधिक सशक्त, चपल एवं धूर्त होगी; और इस प्रकार जो परिवर्त्तन होगा, अर्थात् ऐसा जो विकास होगा, वह केवल एक विशिष्ट नैसर्गिक परिस्थिति में और नैसर्गिक नियम के अनुसार ही होगा। डार्विन की यह विचार-शैली अत्यन्त सीधी-सादी, सरल और तर्कसम्मत है। इस प्रकार डार्विन के समय तक जिस रहस्य का उद्घोटन नहीं हुआ था, उसे डार्विन ने खोलकर रख दिया; और इसमें विकास का कारण उसने जीवन-रक्त के लिए होने वाली चढ़ा-ऊपरी (संघर्ष) और उसमें विजय पाने-योग्य अत्यन्त योग्य प्राणियों के शेष (जीवित) रहने की शक्यता को बतलाया।

ऊपर डार्विन की उपपत्ति का कुछ ही दिग्दर्शन कराया गया है; क्योंकि आगे चलकर इसी विषय पर हमें विस्तार के साथ विचार करना है। तथापि, यह तो कहना ही होगा, सर्व-साधारण को उसकी उपपत्ति इतनी सीधी-सादी और सम्पूर्ण प्रतीत हुई है कि इसके द्वारा विकासवाद का शीघ्रता के साथ प्रसार होकर अन्त में सर्वत्र उसीका बोलबाला हो गया है। यह ठीक है कि सन् १८५९ ई० में जब डार्विन ने अपने इस 'जातियों का मूल'

## विकासवाद

प्रन्थ के द्वारा पहले-पहल इस उपपत्ति की घोषणा की, तो—उस समय लोगों के प्राचीन मताभिमानी होने के कारण—अनेकों ने खूब ज़ोरो से डार्विन का विरोध किया था। परन्तु डार्विन की विचार-शैली तो इतनी अचूक और उसकी मीमांसा ऐसी जब-दृस्त नींव पर स्थापित थी कि चाहे-जैसे आघात होने पर भी उनका फिसलना बहुतांश में असम्भव ही था। अलावा इसके डार्विन स्वयं तो यद्यपि बहुत वाद-विवाद-पट्टु न था, भगव उसकी मदद के लिए इंग्लैण्ड में हक्मसले और जर्मनी में हेकेल सरीखे अतिशय विद्वान्, तार्किक और वाद-विवाद में सिद्ध-हस्त शिष्य उसे मिल गये थे। उन्होंने अपने लेखों और व्याख्यानों के द्वारा विकासवाद का ऐसा जबर्दस्त प्रसार किया कि उसके फल-स्वरूप आज-पर्यन्त इस सिद्धान्त के विरुद्ध एक अज्ञर भी नहीं सुनाई पड़ता। यही नहीं बल्कि अर्वाचीन शास्त्रीय एवं तात्त्विक वादमय में तो यह सिद्धान्त इतना बद्धमूल हो गया है कि अब तो इसे बहुत कुछ स्वयं-सिद्ध ही माना जाने लगा है।



## विकास के प्रमाण

**पि**छले अध्याय में ऐतिहासिक हृषि से विकासवाद के सम्बन्ध में विचार करके यह तो हम जान ही चुके हैं कि आजकल के (अर्वाचीन) सभी शाखोंमें यह सिद्धान्त ऐसा हृदमूल हो गया है कि कोई समझदार आदमी तो अब इसके धारे में शंका करता ही नहीं। क्योंकि प्राणिशाखा और घनस्पतिशाखा में जो अनेक वातें हृषिगोचर होती हैं, इस सिद्धान्त के द्वारा न केवल उन सबकी शृङ्खला ही बड़ी उत्तमता के साथ लग जाती है बल्कि इन शाखों की अनेक महत्वपूर्ण अर्वाचीन शोधों का दारमदार भी इसीपर है। तथापि किसी वात के सर्व-

## विकास के प्रमाण

सम्मत होने ही के कारण हम उसपर विश्वास क्यों करलें, जब-तक कि उसके कारणों की छानबीन न करली जाय ? अतः इस अध्याय में मंचेष में उन कारणों का ही कुछ वर्णन किया जाता है ।

यह तो पहले अध्याय में हम देख ही चुके हैं कि जीव-सृष्टि में होने वाली प्राणियों एवं वनस्पतियों की भिन्न-भिन्न जातियों ( क्रिस्मो ) की उत्पत्ति के बारे में दो तरह की उपपत्तियाँ दी जाती हैं । एक तो यह कि प्रत्येक जाति को ईश्वर ने पृथक्-पृथक् अर्थात् स्वतंत्र रूप से निर्माण किया है—अर्थात् अद्वृत या दैवी; और दूसरी यह कि, इन सब जातियों की उत्पत्ति किन्हीं स्वाभाविक अथवा नैसर्गिक कारणों से ही हुई है । इनमें दूसरी मीमांसा अर्वाचीन है और पहली प्राचीन । रास्त्रीय शोधों के इतिहास को हम देखें तो साधारणतः उनमें भी हमें यही बात दिखाई पड़ेगी । उदाहरणार्थ, पहले, एक समय ऐसा था कि अगर कोई आदमी बीमार पड़ता तो उसे अच्छा करने के लिए मन्त्र-न्तंत्रादि का प्रयोग किया जाता था । अर्थात् उस समय के लोगों की यह धारणा थी कि जो भी रोग होते हैं वे सब किसी न किसी दैवी अथवा अमानुषीय कारण से ही होते हैं, मनुष्य का उसमें कोई बस नहीं । परन्तु बाद में जैसें-जैसे समय व्यीतता गया उन्हें इस बात की असत्यता प्रतीत होने लगी और तब मंत्रों के बजाय

‘औषधियों का प्रयोग शुरू हुआ। अर्थात् कालान्तर में लोगों को यह विश्वास हो गया कि दैवी नहीं बल्कि किन्हीं स्वाभाविक चीज़ नैसर्गिक कारणों ही से रोगों की उत्पत्ति होती है और तब उनका निदान भी नैसर्गिक उपायों से ही किया जाने लगा। हमारे सामने जो प्रश्न है, उसपर भी यही बात लागू होती है; और उसपर से यह अनुमान निकलना स्वाभाविक ही है कि विभिन्न जातियों की उत्पत्ति का कारण भी दैवी नहीं नैसर्गिक ही होना चाहिए।

‘सभी चीजें थोड़े बहुत परिमाण में घराबर बदलती रहती हैं, जैसा इस समस्त सृष्टि पर सूक्ष्म दृष्टिपात करने पर दिखलाई भी पड़ता है। समाज की रचना, तारागण, मनुष्य की कल्पना, अथवा अन्य किसी भी वस्तु को लीजिए, उन सबके परमाणु बराबर बदलते ही रहते हैं। हमारी पृथ्वी भी आरम्भ में तो तप्त ऐंवायुमय—अर्थात् तेज या अग्नि और वायु से भरी हुई—ही थी, क्रम-क्रम से स्थिति में परिवर्तन होते हुए ही तो, कालान्तर में, उसे पहले द्रव-रूप और उसके बाद घन-रूप प्राप्त हुआ। उस समय तो इसकी ऊषणता इतनी अधिक थी कि किसी प्राणी अथवा वनस्पति का इसपर नाम भी न था। तब, इसी नियम के अनुसार, यदि हम यह अनुमान लगावें कि जिन अनेक प्राणियों एवं वनस्पतियों को आज हम इस भूमंडल पर देखते हैं वे सब

## विद्वास के प्रमाण

भी किसी प्रकार एकापक्क यहाँ नहीं आ पहुँचे बल्कि क्रम क्रम से बदलते हुए ही इस स्थिति को प्राप्त हुए होगे, तो यह निश्चय ही सम्भव प्रतीत होगा ।

जीव-सृष्टि में भिन्न-भिन्न प्रकार के असंख्य प्राणी एवं वन-स्पति हैं; जिनका प्राणिशास्त्र एवं वनरपतिशास्त्र के आचार्यों ने वर्गीकरण भी किया है । उस वर्गीकरण को यदि हम बतलाना चाहें तो हमें वैसा ही करना होगा, जैसे कि इतिहास में आम तौरपर किसी परिवार की वंशावली दी जाती है । अर्थात् प्राणियों के भिन्न-भिन्न वर्गों-उपवर्गों और जातियो-उपजातियों का सब मिलाकर एक बड़ा वृक्ष ही बन जायगा । फिर इस सम्बन्ध में यह भी ध्यान रखना चाहिए कि जिन प्राणियों अथवा वनस्पतियों का वर्गीकरण किया जायगा, आकाश के तारागणों की नहीं, उन्हे गिनना भी कुछ सहज नहीं है । अतएव इस भंडट से बचने की दृष्टि से हम उसे यहाँ नहीं दे रहे हैं, वैसे उसकी रचना पूर्णतः नैसर्गिक तौरपर ही हुई है । किसी भी वर्ग के भिन्न-भिन्न प्राणियों को लें तो उनके शरीरों की रचना में थोड़ा-बहुत साहश्य तो मिलेहीगा । इसी प्रकार एक वर्ग से दूसरे वर्ग में जाने वाले प्राणियों के बीच अपेक्षाकृत और भी अधिक समता दृष्टिगोचर होगी । मतलब यह कि वर्गीकरण के समस्त वृक्ष पर सूखम हृष्टि-शात किया जाय तो महज ही कल्पना होगी, कि ये सब प्राणी

मानों एक बड़ा भारी वंश-विस्तार ही है, और जिस प्रकार किसी वंशावली के मनुष्यों में नजदीकी या दूर-पार के कुछ-न-कुछ नाते-रिश्ते होते ही हैं वैसे ही इन विभिन्न प्राणियों में भी परस्पर कुछ-न-कुछ सम्बन्ध अवश्य होगा; यही नहीं बल्कि जैसे-जैसे वर्गीकरण पर ध्यान दिया जायगा वैसे-वैसे वे नाते भी अधिकाधिक निकटवर्ती प्रतीत होते जायेंगे। इसपर मेरे सहज ही यह कल्पना होती है, कि अवश्य ही ये सब प्राणी मूल में कुछ थोड़े से पूर्वजों के ही वशज हैं; यदि कुछ अन्तर है तो यही कि वे पूर्वज लाखों वर्ष पहले, अर्थात् अत्यन्त प्राचीन काल में, हुए होंगे। (चित्र नं० २)

इस प्रकार विकासवाद का मूल यही कल्पना है कि परिस्थिति में जैसे-जैसे परिवर्त्तन होता जाता है उसीके अनुसार प्राणियों की शरीर-रचना भी बदलती जाती है, जिससे कि वे उस परिवर्त्तित परिस्थिति का सुक्रावला करने में असमर्थ न रहें, और फिर आनुवंशिक-संस्कारानुसार भावी पीढ़ियों में क्रमशः वृद्धि होते हुए अन्त में उन प्राणियों के सारे रंग-रूप ही बदले हुए मालूम पड़ने लगते हैं। अब देखना यह है कि परिस्थिति के अनुसार शरीर-रचना में परिवर्त्तन होने की बात का समर्थन करने वाले कुछ प्रमाण भी मिलते हैं या नहीं।

विचार करने पर मालूम पड़ेगा कि ऐसे प्रमाणों की कुछ

## विकास के ग्रन्थ

की कमी नहीं। प्राणिशास्त्र और वनस्पतिशास्त्र तो उनसे भरे पड़े हैं। अतः उनमें से मुख्य-मुख्य कुछ उदाहरण यहाँ दिये जाते हैं। बाहर से एक-दूसरे से विलक्षण भिन्न दीखने वाले कुछ प्राणियों को लीजिए। उनके शरीरों को अन्तर्रचना देखें तो हमें उनमें विलक्षण समता मिलेगी—और वह भी इतनी प्रत्यक्ष कि हमें आश्चर्य इसी वात पर होगा कि अन्दर एक-दूसरे के समान (एकसे) होते हुए भी इनके वाह्य रूप में इतनी भिन्नता कैसे हो गई ! परन्तु विकासवाद के अनुसार विचार करें तो बड़ी सुन्दरता के साथ हमें इसका कारण मालूम हो जायगा, जो कि नीचे दिया जाता है।

उदाहरण के लिए मनुष्य, वन्दर, पक्षी, चिमगाड़, हँसली और नीलमछली, इन छ. प्राणियों को लीजिए। बाहर से देखने में इनमें एक-दूसरे से इतनी भिन्नता है कि इनमें से किसी एक को देखकर उसपर से दूसरे की तो कल्पना तक न होगी, क्योंकि संवय (हलचल), आहार-विहार आदि इनकी सभी वाते एक-दूसरे से संवर्था भिन्न है। मगर दिलगी यह है कि उनके किसी अवयव को लेकर उसकी अन्तर्रचना पर यदि हम सूख्म दृष्टिपात करें तो उसमें तो इतनी समानता है कि हमें एक-एक यह सदैह होने लगेगा कि किसी एक ही प्राणी के अवयवों को तो कही हम बार-बार नहीं देख सकते हैं। समझने के लिए इन सब-

प्राणियों के हाथ और पाँव लेकर सबसे पहले मनुष्य की अन्तर्रचना पर ही विचार कीजिए।

मनुष्य के पूरे हाथ अर्थात् कन्धे से लेकर अंगुलियों तक की अन्तर्रचना कैसी होती है, यह चित्र न० ३ में प्रदर्शित है। उसमें कन्धे से लेकर कुहनी तक तो एक लम्बी हड्डी है (चित्र में यह नहीं बतलाई गई है), दो परस्पर जुड़ी हुई हड्डियाँ कुहनी से कलाई तक हैं, तदुपरान्त दो अवलियाँ (पंक्तियाँ) छोटी-छोटी हड्डियों की हैं, उनके बाद पाँच हड्डियाँ हथेली की तथा सबके अखंक में पाँच अंगुलियाँ हैं, जिनमें हरएक में एक के बाद एक इस प्रकार दो-दो या तीन-तीन हड्डियाँ होती हैं। यही हाल पाँव की अन्तर्रचना का है, यदि कुछ फर्क है तो वह सिर्फ हड्डियों की छुटाई-बड़ाई का। मनुष्य ही क्यों, बन्दर के हाथ-पाँव की अन्तर्रचना को लें तो वह भी ऐसी ही है; यदि कुछ फर्क है तो यही भी वही मनुष्य व बन्दर के हाथ-पैरों को उपर्युक्त हड्डियों की छुटाई-बड़ाई का ही है।

अब ज्ञान सीलमछली और 'व्हेल' या देवमछली को देखिए (चित्र नं० ३ व ४)। मनुष्य और बन्दर में इतनी तो समानता है कि वे दोनों ही जमीन पर रहने वाले हैं, पर मनुष्य और देवमछली व सीलमछली के बीच तो यह समानता भी नहीं है। देवमछली जहाँ पूर्णतः जलचर है—अर्थात् सदैव पानी में रहती है।

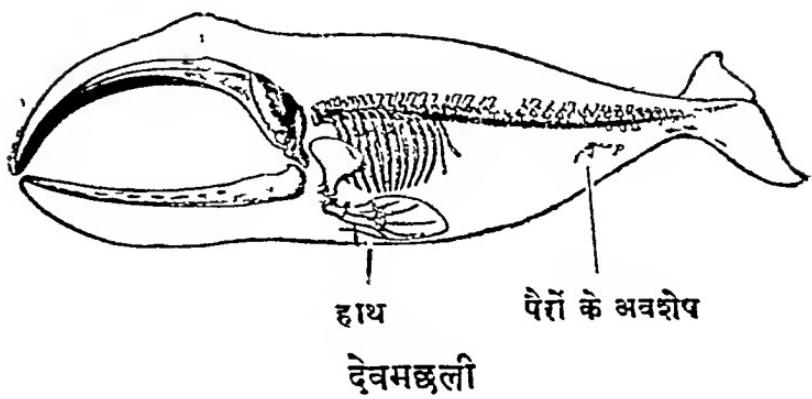
## चित्र नं० ३



मनुष्य का हाथ

देवमछली का पर

## चित्र नं० ४

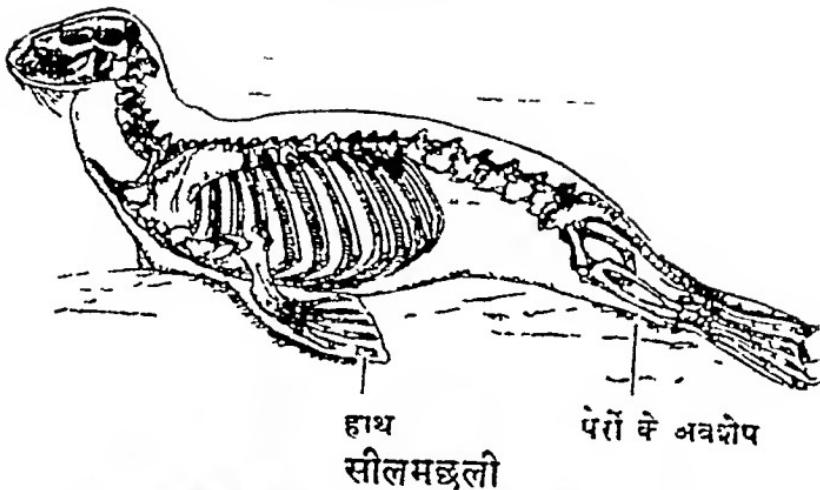


हाथ

पैरों के अवशेष

देवमछली

## चित्र नं० ५



## चित्र नं० ६

टेरोडॉक्टिल  
(एक प्राचीन पक्षी)

चिसगादड़

अर्वाचीन पक्षी



## विकास के प्रनाल

हैं, तब्हीं सीलमछली हैं अर्द्ध-जलचर अर्थात् कभी पानी में रहती है तो कभी पृथ्वी पर भी। फिर यह तो सब जानते ही हैं कि जलमीन पर चलना और पानी में तैरना दो सर्वथा भिन्न क्रियाएँ होने के कारण किसी एक ही तरह की शरीरन्रचना दोनों जगह एकसी उपयोगी नहीं हो सकती। पानी में तैरने वाले की शरीर-रचना यदि दोनों तरफ चुरट की तरह हो तो वह तैरने वाले के लिए विशेष उपयोगी होगी, क्योंकि ऐसा शरीरन्रचना से पानी के प्रतिरोध में कमी होकर तैरने वाले को तैरने में सुगमता हो जाती है। इसी प्रकार तैरने में पौँछों की अपेक्षा हाथों का ही उपयोग अधिक होता है, जैसा कि तैरना जाननेवालों को प्रत्यक्ष अनुभव भी होगा। इन दोनों कारणों से पानी में रहने वाले जीवों के लिए कैसी शरीरन्रचना अपेक्षाकृत अधिक श्रेयस्कर होगी, यह पाठक समझ ही गये होंगे। अब यदि हम चित्र में प्रदर्शित टेवमछली तथा सीलमछली की शरीरन्रचना को देखें तो मालूम हो जायगा कि उपर्युक्त दोनों भेद थोड़े-बहुत परिमाण में उनमें बने ही हुए हैं। हाथों का रूपान्तर तो दोनोंही में परो या छने ( Fin ) में हो गया है, और चूंकि पानी में रहते हुए इन्हे अपने इन परों पर ही अवलम्बित रहना पड़ता है, इसलिए इनमें मजबूती भी खूब आ गई है। इसी प्रकार मनुष्य के हाथ की अंगुलियों में उन्हें अलग-अलग करने की जो सामर्थ्य होती है,

देवमछली तथा सीलमछली मे वह नष्ट होकर हाथो का रूपान्तर करने मे सारा लक्ष्य तैरने की सुविधा पर दिया गया है, जिससे सारे हाथ पर एक प्रकार के छोटे-छोटे कोश होकर उनका एक अच्छा-भला डैना ही बन गया है।

तैरने मे पौंछों का विशेष उपयोग नहीं होता, यह पहले कहा ही जा चुका है, अतः स्वभावतः जलचर प्राणियों मे उनकी कोई स्वास जखरत न रही। इसीलिए देवमछली मे पौंछों का भाग नष्ट होकर पैर बिलकुल नहीं-से रह गये हैं। परन्तु इसके विपरीत सीलमछली है अर्द्धजलचर, जिससे उसे थोड़ा-बहुत जमीन पर चलना ही पड़ता है। अतः हाथों का तो यद्यपि उसमे भी देव-मछली ही के समान रूपान्तर हो गया है, पर पौंछों का थोड़ा अवशेष रह ही गया है। (चित्र नं० ४ व ५)

लेकिन बाह्याकृति मे इतनी विभिन्नता हो जाने पर भी इन दोनों प्राणियों के डैनों की अन्तर्रचना से तो सब हङ्गियाँ और उनकी रचना करीब-करीब मनुष्य के हाथ के समान ही हैं, जैसा कि चित्र नं० ३ मे देखा जा सकता है। इस चित्र मे पाठक देखेंगे कि, जैसा ऊपर कहा जा चुका है, देवमछली मे पैरों का कोई निशान नहीं है, परन्तु सीलमछली के शरीर की बाह्याकृति मे हमें पैरों का थोड़ा-बहुत निशान भिलता है और अखीर मे करीब-करीब मनुष्य के पैरों की हङ्गियों के समान ही हङ्गियाँ हैं।

दृष्टिगोचर होती हैं—यही नहीं किन्तु ये हड्डियाँ सीलमछली के शरीर में जुड़ भी उसी प्रकार रही हैं, जैसे कि मनुष्य के शरीर में पैर जुड़े रहते हैं।

यह तो हुआ जलचर प्राणियों के सम्बन्ध से। अब पक्षियों को लीजिए। पक्षियों में हाथों का रूपान्तर, डैने के बजाय, पह्लों में हुआ दिखलाई देता है, और वह इस प्रकार कि जिससे उड़ते समय, वायु में संचार करने में, उन्हें सुगमता रहे। यह तो सभी को साल्दम है कि मनुष्य के हाथ में अधिकांश शक्ति कलाई व बाजू ही के स्तायुओं में रहने के कारण अंगुलियों के स्तायुओं में बहुत कमजोर रहता है। अतः हाथों का उपयोग जब उड़ने के लिए होने लगा, तो, उससे अंगुलियों की अपेक्षा कलाई की जो सुरक्षित अधिक होती ही है, इसलिए पक्षियों में अंगुलियों की लम्बाई कम होकर पह्लों का अधिकांश विस्तार कलाई और भुजा में होना स्वाभाविक ही था—अर्थात् अंगुलियों की ज़गह उनमें कलाई और बाजू अधिक लम्बे हो गये। मगर अंगुलियों की संख्या में कमी और आकार में विभिन्नता हो जाने पर भी, जैसा कि चित्र नं० ६ में दिखाई देगा, उनके और सब भाग तो उन्होंके त्योहारी कायम हैं, यहाँ तक कि उनके बजाय यदि चिमगोदड़ को पह्ले लिया जाय तो उसमें तो हमें अंगुलियों की संख्या तक द्यो-की-न्यो सौजूद मिलती है।

एसी दशा में उपयुक्त मद बातों की समाधानकारक उपपत्ति कैसे लगाई जाय? उदाहरण के लिए इन प्राणियों के एक विशेष अवयव का तुलनात्मक विचार करके यह तो हम देख ही चुके हैं कि अपनी-अपनी सुविधा-असुविधा के अनुसार इन विभिन्न प्राणियों की शक्ति-सूरतों में भी विभिन्नता हो गई है। मगर लुटक यह है कि इतने पर भी उस अवयव की अन्तर्चना तो इन सब में अभी भी ज्योकी-त्योहारी एक समान है, जैसा कि सूधमदृष्टि से विचार करके हम देख भी चुके हैं। फिर यह भी नहीं कि यह समानता उस अवयव की हड्डियों ही में हो, प्रत्युत् उसके म्नायुओं एवं रक्तवहियों में भी यही बात दृष्टिगोचर होती है। अतः देखना यह है कि अन्दर तो एक ही तरह का ढाँचा और रचना भी एक ही तरह की, पर बाहर बिलकुल निराले प्राणी, वास्तव में यह बात क्या है—सृष्टिदेवता का कोई जादू है, या इसका कोई समाधानकारक कारण भी है?

इन सब बातों का विचार करें तो, हमें वही कहना पड़ेगा, इस सब विभिन्नता का कारण, एक-दूसरे से सर्वथा भिन्न दीखनेवाले इन सब प्राणियों में किसी-न-किसी सामान्य तत्त्व का अस्तित्व ही होना चाहिए; अर्थात् इनमें कोई-न-कोई सर्वसामान्य सम्बन्ध अवश्य होगा, और आनुवंशिक संस्कार एवं विकास ही मानो ह तत्त्व या सम्बन्ध है। इस सिद्धान्त के अनुसार देवमछली,

सीलमछली, पक्षी और मनुष्य, इन सबके अत्यन्त प्राचीन काल के पूर्वज जमीन पर रहने वाले कोई-न-कोई प्राणी ही थे, जिनकी दशा में क्रमानुसार परिवर्त्तन होते हुए कालान्तर में उनमें से कोई तो जलचर हो गया और किसी को वायु में रहने का संयोग हुआ। अर्थात् जैसेन्जैसे परिस्थिति बदलती गई उसके साथ-साथ उनके शरीरों में भी ऐसे परिवर्त्तन होना आवश्यक हुआ कि जिससे वे परिवर्तित स्थिति का मुकाबला कर सकें। और जिन भागों से इस विभिन्नता का आरम्भ होता है उनमें से मुख्य हैं— शरीर की चमड़ी, दाँत, नाखून आदि। चूंकि ये भाग प्रत्येक व्यक्ति में समय-समय पर प्रायः बदलते ही रहते हैं, इसलिए सबसे पहले इन्हींसे परिवर्त्तन का आरम्भ होना स्वाभाविक ही है। परन्तु फिर शरीर के इनसे अधिक महत्व के भागों में भी परिवर्त्तन शुरू होकर कालान्तर में शरीर के बाह्यरूप में ऐसे फेर-बदल हो गये कि जिन्हे जमीन पर चलने के बजाय पानी में तैरने का संयोग हुआ वे तैरने के और जिन्हें वायु में उड़ने का संयोग हुआ वे उड़ने के उपयुक्त हो गये, अर्थात् एक ओर तो हाथ के ढैने वन गये, दूसरी ओर पह्ला या पर। सीलमछली में यह परिवर्त्तन पूरे तौरपर नहीं हुआ; क्योंकि, जैसा कि हम देख चुके हैं, उसके शरीर में यद्यपि पैर की बहुत-सी हड्डियाँ मिलती हैं वो भी उसके पैर छोटे रहकर सिरे पर आगे को मुड़े हुए होने

से चलने के प्रायः निरूपयोगी ही हो गये हैं। देवमछली का चूँकि पानी से अधिक सम्बन्ध रहता है, इसलिए वह इससे आसो बढ़ गई है; अर्थात् उसके शरीर में न केवल बाहर ही पैरों का नाम-निशान नहीं रहा बल्कि अन्दर भी नाम-मात्र ही अवशेष रह गया है। परन्तु ये जो फेर-बदल या परिवर्त्तन हुए, यह ध्यान रखने की बात है, वे सब पानी में तैरने और आकाश में उड़ने में सुगमता होने की ही दृष्टि से हुए हैं। अर्थात् इन सबकी अन्तर्रचना (एकसमान), दीखने का कारण - केवल यही है कि ज्ञेय भागों में परिवर्त्तन की ज़रूरत न थी। इसपर से कहना पड़ेगा कि बाहर एक-दूसरे से विलकुल भिन्न दीखनेवाले ऐसे प्राणियों की अन्तर्रचना में हमें जो विलक्षण समानता दृष्टिगोचर होती है उसे विकासवाद का समर्थक बढ़िया प्रमाण ही मानना होगा।

इसी प्रकार कई प्राणियों से कुछ ऐसे भाग मिलते हैं कि जो अन्य प्राणियों के चैसे ही भागों के विलंकुल ही समान होते हैं, किन्तु उनका उपयोग उन प्राणियों में विलकुल नहीं होता। इन्हे हम 'अवशिष्ट भाग' कह सकते हैं। जैसे किसी-किसी देवमछली के दोंत होते हैं, तथापि उनका उपयोग उसे कुछ भी नहीं होता। सौंपों में भी किसी-किसी से बहुत जरा-ज्ञरा-से पाँव होते हैं, पर उपयोग इनमें भी उनका कुछ नहीं होता। ये अवशिष्ट

## विकास के प्रमाण

भाग इन प्राणियों में कहाँ से और क्यों आये, यह एक विचार-रीच बात है। पर विकासवाद के अनुसार इस जिज्ञासा का समाधान भी भली-भाँति हो जाता है। क्योंकि विकासवाद के अनुसार इन अवशिष्ट भागों का पाया जाना यह सिद्ध करता है कि इन प्राणियों में अब चाहे इनका कोई उपयोग नहीं रहा परन्तु पहले किसी समय उनमें इनका उपयोग अवश्य होता था; बाद में जैसे-जैसे उपयोग कम होता गया उसके साथ-साथ ये भी घट्टे गये, यहाँ तक कि अन्त में उनके अवशेष-भात्र शेष रह गये। इसके लिए किसी हृष्टान्त की ज़रूरत हो तो हम उन स्वरों का उदाहरण ले सकते हैं, जिनका उच्चारण नहीं होता। यथा, मैंने, घर में, आदि। उच्चारण की दृष्टि से देखा जाव तो इन शब्दों में लगे हुए अनुस्वारों का उपयोग या 'आवश्यकता' सर्वथा हुई नहीं; तथापि गौर करने पर पता चलेगा कि उनसे इन शब्दों के पूर्व-रूपों का परिचय मिलता है। इसी प्रकार विकासवाद के अनुसार हम कहेंगे कि उक्त अवशिष्ट भाग भी उन-उन प्राणियों के पूर्व-रूपों के ही परिचार्यक हैं।

विकास-सम्बन्धी और भी जोरदार प्रमाण की ज़रूरत हो तो वह गर्भशास्त्र में मिल सकता है, जो कीचे दिया जाता है।

किसी भी प्राणी की गर्भावस्था में होने वाली वृद्धि पर वृद्धि हम सूख्म दृष्टिपात करें तो हमें वडे ही विचित्र चमन्कार दिखाई